Margolinas, C. (1994). Jeux de l'élève et du professeur dans une situation complexe. In *Séminaire de didactique et technologies cognitives en mathématiques* (pp. 27-83). Grenoble: LSDD-IMAG.

Jeux de l'élève et du professeur dans une situation complexe

Claire Margolinas
IUFM de Clermont-Ferrand

Je tiens à remercier tout particulièrement Hélène Di Martino, non seulement parce que je lui emprunte ici un protocole, mais surtout parce que ce travail est né de l'atelier très stimulant qu'elle a animé avec Marc Legrand cet été.
J'espère que cet article contribuera au débat qu'Hélène a su ouvrir avec ardeur et intelligence.

Introduction

“L'analyse du rôle du maître pose des problèmes qui sont typiques de l'analyse a posteriori“, mais nous avons encore peu de moyens: “il me semble que le premier pas à faire dans cette direction est de nous doter de moyens pour décrire la structure et les contraintes d'une situation déjà observée de manière à l'analyser a priori“. Ces extraits de Margolinas 1992a montrent le point de départ de ce travail.

En effet, nous connaissons l'importance de l'analyse a priori (que je ne confonds pas avec l'analyse préalable, voir ibid.) d'une situation pour analyser les procédures des élèves. En ce qui concerne le maître, la nécessaire liberté des choix didactiques rend cette opération difficile. C'est ce type d'analyse qui m'intéresse depuis ma thèse (1989). L'analyse des phases de conclusion était ma première tentative dans ce domaine; même si elle a donné des résultats (voir Margolinas 1992b), il ne s'agissait que d'un outil relativement grossier, peu utilisable seul pour l’étude de réalisations didactiques ordinaires.

Mon travail a connu un tournant quand j'ai commencé à utiliser un outil dont la description n'est pas récente (Brousseau 1986): la structuration du milieu. Après quelques remaniements que j'estimais nécessaire pour étudier le rôle du maître (Margolinas et Steinbring 1993, Margolinas 1993a), je me suis intéressée à l'analyse de réalisations didactiques très diverses (dans les articles précédents, voir aussi Comiti, Grenier et Margolinas 1994). En effet, il me semble que c'est dans la confrontation avec des réalités très différentes qu'il sera possible de mieux comprendre le domaine de fonctionnement de l'outil "structuration du milieu" et ses limites.

Je commencerai (§1) par indiquer quelles sont les questions qui sont en suspens au sujet de l'analyse par la méthode de la structuration du milieu, ainsi que celles auxquelles je m'intéresse dans cet article. Les paragraphes suivants seront consacrés à une analyse a priori (§2) et une analyse a posteriori (§3) très détaillées. En conclusion, nous verrons quels sont les résultats de cette analyse sur la situation étudiée et quelles sont les nouvelles questions qui ont pu être dégagées.

1. Questions en suspens

De nombreuses questions sont en suspens au sujet de l'étude du rôle du maître en général, et de son analyse à l'aide de la structuration du milieu en particulier. Ce séminaire n'a pas pour but de tenter d'y répondre (ou alors très partiellement), mais de montrer un fonctionnement de cet outil d'analyse et les résultats obtenus. Malgré cela, je crois utile de situer cet exposé en indiquant les questions qui se posent actuellement: l'analyse du rôle du maître peut-elle être assimilée à celle d'un "jeu" du maître (§1.1)? Comment l'analyse en terme de savoir ou de connaissance est-elle prise en compte dans la structuration du milieu (§1.2)?

1.1. Jeu du maître

Le titre de l'exposé réfère au "jeu" du maître, ce qui est très ambitieux. En effet, parler en terme de jeu suppose que l'on peut faire un modèle du maître dans une analyse systémique. En 1982 déjà, Harrisson Ratsimba-Rajohn signalait que l'étude du jeu du maître semblait nécessaire pour résoudre certains problèmes que son travail avait soulevés. En 1989, dans ma thèse (voir Margolinas 1993a), j'avais évoqué la difficulté théorique à utiliser une analyse en terme de jeu pour le maître à cause de la nature (humaine et culturelle) du milieu avec lequel il interagit.

Une analyse plus fine du milieu nous permet-elle de caractériser (en terme de jeu?) certaines interactions du maître avec un milieu mieux spécifié et donc plus limité?

1.2. Milieu, savoir et connaissance

Dans le schéma de structuration du milieu adapté de Guy Brousseau (Margolinas 1993b, voir annexe 1), j'ai indiqué que l'on part des systèmes en présence dans la situation didactique: Milieu, Elève, Professeur. Mais si ces systèmes sont bien ceux qui figurent dans les textes de Brousseau concernant le milieu (1986 et 1990), ils ne correspondent pas à la présentation classique des systèmes en présence: Elève, Professeur, *Savoir*, (et éventuellement Milieu).

La place correspondant au savoir semble alors manquer. Du point de vue formel, s'agit-il d'une nouvelle "colonne"? Ou bien les places E et P correspondent-elles de fait à des connaissances ou des savoirs (éventuellement à indicer, comme $C_{E\text{-}3}$, par exemple). J'ai pris ce parti dans cet article, en utilisant la lettre grecque κ indicée par En ou Pn. Dans le présent travail, je ne fais pas de différence entre savoir et connaissance et je n'utilise que le terme "connaissance" quand il est relatif à une personne dans une position donnée. Dans la mesure où il s'agit d'une structuration du milieu d'un point de vue *didactique*, dans lequel ce ne sont pas les personnes qui sont modélisées mais leur rapport à des objets de savoir (en utilisant le vocabulaire de Yves Chevallard, voir 1992 en particulier).

L'étude de cet aspect permettra-t-il une nouvelle voie d'attaque sur la question en débat actuellement des relations entre savoirs et connaissances, en caractérisant les relations entre connaissances ou savoirs selon les différentes positions?

2. Analyse a priori des enjeux de connaissance

2.1. Présentation

Le protocole analysé, établi par Hélène Di Martino, a été élaboré à partir d'un enregistrement vidéo dans un amphi de Deug A1 à l'Université Joseph Fourier de Grenoble en Octobre 1992, il s'agit d'une des premières leçons; l'enseignant était Marc Legrand. Ce protocole a été proposé aux participants de l'atelier animé par Hélène Di Martino et Marc Legrand à l'école d'été de didactique des mathématiques en 1993 (résumé dans les actes de l'école pp. 76-83). Comme il est indiqué dans le compte rendu de l'atelier (p. 82), j'avais proposé d'analyser cette situation à l'aide de la structuration du milieu, en partant de l'idée que cette analyse permettrait de rendre compte de sa profondeur et du jeu complexe entre les niveaux. Le pari étant que cette analyse, en précisant ce qui est "méta" par rapport à quoi (voir commentaire dans l'annexe 1), permettrait d'affiner les interprétations du fonctionnement de la situation "circuit" dans ce protocole.

La structuration du milieu, si elle est relativement bien connue comme objet théorique, l'est peu comme outil d'analyse. Je développerais donc de façon détaillée les étapes de l'analyse a priori que permet cette méthode.

Pour analyser la situation, il est nécessaire de disposer au minimum d'une question posées aux élèves. Ici, nous disposons d'une situation (voir annexe 2), qui comporte des questions (formellement la même question associée à des conjectures différentes). Nous baserons l'analyse a priori sur ces questions.

Pour comprendre l'ordre suivi dans la démarche, il convient de rappeler l'égalité fondamentale pour la constitution de l'analyse: Mn+1=Sn[1], mais cette égalité peut être vue également comme Sn=Mn+1. Je me sers ici de cette symétrie de l'égalité pour envisager différemment l'analyse des niveaux a-didactiques et sur-didactiques.

Je détermine les niveaux a-didactiques (§2.2) en partant de -3 et en allant vers -1, déterminant donc le milieu (Mn) en utilisant la situation précédente (Sn-1).

[1]Au sens strict il faudrait parler d'une inclusion et on pas d'une égalité.

Il est possible de prolonger cette méthode jusqu'aux niveaux 0 et 1, ce qui donne une première détermination de la situation didactique et également de la situation de projet (qui fait partie des situations sur-didactiques). (§2.3)

Les niveaux sur-didactiques correspondent aux positions typiques de l'enseignant. Pour faire leur analyse, il est nécessaire de prendre en compte de nombreux éléments concernant les situations du professeur (noosphérienne, de construction et de projet) dont les indices vont être recueillis dans les discours de l'enseignant (ici, dans les publications de Marc Legrand sur le débat scientifique). L'enseignant est d'une certaine manière dans une position symétrique de celle de l'élève vis-à-vis de la situation didactique (ce qui est cohérent avec le schéma de structuration que je propose). En effet, ce qui est transparent pour l'enseignant ne sont pas les conditions matérielles de la situation objective (qu'il a justement installé et manipulé pour l'élève), mais les conditions, notamment idéologiques, de ses actions didactiques.

C'est pourquoi je développe une structuration du milieu des niveaux positifs symétriquement par rapport à celle des niveaux négatifs: partant du niveau 3 pour aboutir au niveau 1. Il s'agit donc de déterminer les niveaux sur-didactiques (§2.4) "en descendant" de 3 vers 1, en déterminant donc la situation (Sn) en utilisant le milieu précédent (Mn+1). On obtient au passage une nouvelle détermination du niveau 1 (situation de projet).

Je prolonge ensuite cette analyse pour obtenir une autre détermination des niveaux 0 et -1 (situations didactique et d'apprentissage). (§2.5)

Nous avons alors tous les éléments pour comparer les situations -1, 0 et 1 obtenues par les deux chemins possibles (§2.6), les situations obtenues par les deux chemins ne sont pas nécessairement les mêmes, la confrontation entre l'analyse ascendante et l'analyse descendante pourra révéler des différences, [2]ce qui conclura l'analyse a priori.

On peut résumer la démarche par un schéma:

	3 2
1 0 -1	1 0 -1
-2 -3	

[2]Du point de vue formel, j'ai noté d'une flèche descendante ou ascendante les connaissances et les situations repérées dans les deux analyses.

2.2. Questions de méthode

Relations entre a-didactique, didactique, sur-didactique

Dans l'annexe 1, sont définis les niveaux a-didactiques (<0), didactique (0), et sur-didactiques (>0). Au sens strict, *l'élève* et le *professeur* sont représentés dans la position didactique (0) qui est pour moi le niveau de base de l'analyse. L'étude des autres niveaux permettent une analyse fine des positions possibles de l'élève et du professeur et de leur connaissances.

On peut dire que les niveaux stictement négatifs sont ceux qui caractérisent de façon typique la place de l'élève, et les niveaux strictement positifs ceux qui caractérisent de façon typique la place du professeur.

La situation didactique est d'une certaine manière "encadrée" par les situations -1 (d'apprentissage) et 1 (de projet) dans lequel toutes les places (élève et professeur) sont présentes. Je pense (mais il ne s'agit à l'heure actuelle que d'une conjecture) que ces trois niveaux sont toujours essentiels au fonctionnement de toute situation didactique.

Remarque concernant les niveaux sur-didactiques

L'analyse des niveaux a-didactiques présente la caractéristique évidente d'une analyse a priori, dans le sens qu'elle ne dépend pas des faits d'expérience ou d'observation.

En ce qui concerne l'analyse des niveaux sur-didactiques, qui caractérisent le rôle du maître, le problème de méthode qui est posé n'est pas simple de ce point de vue. En effet, les connaissances de l'enseignant sur les situations didactiques relèvent de connaissances de didactique, ou d'autres domaines liés à l'enseignement. Ces connaissances ne sont ni décrites ni structurées d'une façon autonome comme le sont les mathématiques.

Il est donc nécessaire à l'heure actuelle, pour chaque enseignant, d'avoir des sources d'informations directes de ses connaissances (on peut dire aussi croyances, convictions, représentations, etc., je n'établis pas de différence entre ces catégories dans ce texte). Il est parfois possible d'avoir de telles informations dans un cadre d'observation qui ne relève pas de la situation didactique étudiée: interview préalable d'enseignant, par exemple, comme dans Comiti, Grenier, Margolinas 1994.

Dans l'analyse qui nous occupe aujourd'hui, nous sommes dans un cas un peu "intermédiaire". En effet, Marc Legrand est un enseignant-chercheur et, en tant que chercheur, il a exposé ses convictions concernant l'enseignement des mathématiques (je me réfèrerais ici à Legrand 1989 et 1993). D'autre part, l'analyse produite par Di Martino et Legrand (1993) au sujet du protocole étudié révèle également un point de vue de Marc Legrand en tant que chercheur sur les choix qu'il a opéré en tant qu'enseignant dans la séquence considérée.

Pour des raisons de méthode, je ne réfèrerais pas au protocole de la séance dans ce paragraphe, réservant ces références à la partie spécifique de l'analyse a posteriori. Ce choix de méthode ne règle pas la question de la position de l'analyse des niveaux positifs vis à vis du caractère a priori: cette question reste ouverte.

2.3. Les niveaux a-didactiques: analyse “ascendante”

Il s'agit de déterminer un milieu, puis les rapports que peut entretenir un sujet avec ce milieu, et avec quelles connaissances, ce qui caractérise une situation.

Niveau -3: situation objective

M-3: M-matériel	E-3: E-objectif		S-3: situation objective

Le milieu matériel M-3 doit contenir les objets intervenant dans l'interaction (réelle ou évoquée) nécessaire à la définition des contenus de l'énoncé de la question.

Ici, on peut dire qu'il s'agit du fonctionnement d'un circuit électrique évoqué, du point de vue du passage binaire (oui/non) du courant.

Le sujet E-3 entretient des rapports sans enjeu avec M-3, ici il imagine le fonctionnement du circuit. Les connaissances correspondantes sont celles qui lui permettent cette opération mentale:

$\kappa\uparrow_{E\text{-}3}$ *connaissances élémentaires sur le fonctionnement des circuits*

- $\kappa\uparrow_{E\text{-}3}1$ *passage du courant dans tout circuit fermé contenant un générateur*
- $\kappa\uparrow_{E\text{-}3}2$ *lampe allumée sssi passage du courant*

La situation S-3 peut donc être décrite comme la manipulation imaginée du circuit électrique donné.

La situation objective doit être transparente pour les personnes engagées dans la situation didactique. Cette situation objective sert donc effectivement de milieu objectif pour la situation de référence.

Niveau -2: situation de référence

M-2: M-objectif	E-2: E-agissant		S-2: situation de référence

On a donc comme milieu objectif les objets produits par la situation objective, c'est-à-dire les différentes "positions" du circuit électrique[3].

[3]On peut définir une position du circuit électrique comme un couple (Si, Ti) formée d'une valeur de S et d'une valeur de T. Il y a 6 positions possibles pour ce circuit.

Le sujet E-2, E-agissant, entretient des rapports d'action avec le milieu objectif, ici il détermine les valeurs de vérité des Li en fonction de celle des Si ou Ti pour déterminer les "concomittances"[4] de valeurs. Les connaissances correspondantes sont celles qui sous-tendent cette détermination:

$\kappa\uparrow_{E\text{-}2}$ *connaissances sur les "concomittances"*

- $\kappa\uparrow_{E\text{-}2}1$ *combinatoire des positions possibles du circuit*
- $\kappa\uparrow_{E\text{-}2}2$ *"priorité au commutateur" dans les déterminations de concomittance*[5]

La situation S-2 peut donc être décrite comme l'étude des concomittances de valeur pertinentes dans l'étude du problème posé. Cette étude est conduite d'un point de vue exhaustif ou quasi exhaustif.

Du point de vue de la "concomittance", X n'a de sens que si X peut être réalisée, ce qui veut dire que quand X ne peut être réalisé, on ne peut rien savoir.

Exemple: pour la proposition C4 (Si L2 alors L5 ou L4), on cherche à savoir les relations de concomittance entre L2, L5 et L4:, on obtient les triplets concomittant suivants

1) (L2 , L5 , non L4) (position S2, Ti)
2) (L2 , L5 , non L4) (position S3, T1)

Il n'existe pas de triplet (L2, L5, L4) concomittant (on verra dans la situation S-1 la conséquence de cette absence).

La situation de référence doit être partagée par les étudiants pour que les discussions concernant les valeurs des lampes puissent avoir lieu (les positions du circuit n'intervenant que comme des conditions de possibilité, c'est-à-dire éventuellement dans l'argumentation).

Niveau -1: situation d'apprentissage

M-1: M-de référence	E-1: E-apprenant	P-1: P-observateur	S-1: situation d'apprentissage

Le milieu de référence contient les objets produits par la situation de référence, ici le tableau des concomittances liées à l'étude d'une proposition.

Le sujet E-1, E-apprenant, est confronté à une situation d'apprentissage qui est problématique, et non plus transparente comme les précédente, ici il doit utiliser les concomittances de valeurs pour tester les assertions proposées.

---

[4] Chaque lampe peut avoir la valeur allumée ou éteinte, je dirais que n valeurs de lampes ($n \leq 6$) sont en relation de concomittance s'il existe une position (Si, Ti) du circuit telle que ces n valeurs soient réalisées simultanément.

[5] J'entends par là que pour déterminer si des valeurs de lampes sont concomittantes, il faut chercher une position des commutateurs qui permet ces deux valeurs en même temps. C'est la position des commutateurs qui détermine les valeurs des lampes.

Dans le domaine de la logique, nous devons envisager le fonctionnement de connaissances de plusieurs types:

$\kappa\uparrow_{E\text{-}1}$ *connaissances de "logique courante"*

- $\kappa\uparrow_{E\text{-}1}1$ *une proposition qui ne se réalise jamais n'a pas de sens*
- $\kappa\uparrow_{E\text{-}1}2$ *une proposition qui comporte des précisions inutiles est mal formée*

Il y a également des connaissances spécifiques en cours d'apprentissage:

$\kappa\uparrow_{E\text{-}1}$ *connaissances sur les connecteurs logiques*

- $\kappa\uparrow_{E\text{-}1}3$ *<a ou b> est vraie dans les cas (a, b), (a, non b), (a, non b); elle est fausse dans le cas (non a, non b)*[6]
- $\kappa\uparrow_{E\text{-}1}4$ *<si a alors b> est vraie dans les cas (a, b), (non a, b), (non a, non b); elle est fausse dans le cas (a, non b).*

$\kappa\uparrow_{E\text{-}1}$ *connaissances relatives à la simplification des assertions complexes*[7]

- $\kappa\uparrow_{E\text{-}1}5$ *<si a ou b, alors c> est équivalente à <<si a alors c> et <si b alors c>>*
- $\kappa\uparrow_{E\text{-}1}6$ *<si a alors b ou c>est équivalente à <<si a alors b> ou <si a alors c>>*

On voit donc que les connaissances logiques en jeu au niveau -1 sont nombreuses et complexes, et qu'elles sont toutes l'objet d'un apprentissage en cours (ce qui ne signifie pas qu'elle fasse l'objet d'un enseignement en cours).

La situation S-1↑ peut donc être décrite comme le débat des valeurs de vérité des propositions C4, C6, C7. Le résultat produit par E-1 dans cette situation est donc la valeur de vérité des propositions. Il n'existe pas de critère de validité institutionnalisé (connu) sur ce résultat (les tables de vérité ne sont pas connues des étudiants en octobre 1992). D'autre part, le milieu de référence ne donne pas ici de rétro-action permettant d'interpréter les résultats envisagés. Les phases de conclusions concernant les résultats de ce niveau qui auront lieu dans les phases didactiques seront donc significatives pour les apprentissages en cours. Nous serons donc attentifs à ce point dans l'analyse a posteriori.

---

[6]S'agissant de connaissances attribuées à la personne de l'élève, j'ai utilisé les notations connues par les étudiants (et reprises dans les conjectures-questions): si … alors …, en particulier. Pour éviter trop d'ambiguïté, lorsque je l'ai jugé nécessaire, j'ai encadré une assertion par <>, ce qui n'est qu'une notation interne au présent article. Les couples entre parenthèses () représentent des valeurs de propositions élémentaires vraies en même temps.

[7]Les assertions suivantes sont à interpréter *dans la logique des propositions.* En effet, dans le cas des circuits, on ne travaille ici à chaque fois que sur un cas, pour savoir s'il s'agit d'un exemple, d'un contre-exemple, ou d'un hors-sujet, et l'on est donc dans le calcul des propositions. Il ne faut donc pas interpréter ces assertions comme étant "implicitement quantifiées", ce qui pourrait conduire à des interprétations fausses. Je remercie Viviane Durand-Guerrier qui m'a si clairement montré la relation entre calcul des propositions et calcul des prédicats dans ce cas.

Etude de C4 dans la situation S-1

C4: Si L2 alors L5 ou L4

Ici, le passage des relations de concomittance au test des assertions est complexe, car la proposition "naturelle" serait: C4.1: <si L2 alors <L5 et non L4>>, ou bien C4.2: <si L2 alors L5>.

C4.1 n'entretient pas de relation logique avec l'assertion étudiée, mais par contre C4.2 conduit ($\kappa\uparrow_{E\text{-}1}2$) à conclure que C4 est mal formée.

Dans la mesure où C4.2 est déduite directement des relations de concomittance, on pourra donc être tenté de l'utiliser pour résoudre ce problème. Dans ce cas, il faudra, implicitement ou non, considérer que <si L2 alors L5 ou L4> est équivalente à <<si L2 alors L5> ou <si L2 alors L4>> ($\kappa\uparrow_{E\text{-}1}6$), puis vérifier que <si L2 alors L5> est toujours vraie, et en déduire ($\kappa\uparrow_{E\text{-}1}3$) que la proposition est donc vraie.

Mais si l'on ne considère aucune des propositions issues des relations de concomittances entre les lampes L2, L5, et L4, on peut obtenir C4 à partir des propositions élémentaires (L2) et (L5 ou L4), qui sont toujours vraies en même temps (ce qui ne met en jeu que $\kappa\uparrow_{E\text{-}1}3$ et $\kappa\uparrow_{E\text{-}1}4$).

Cette décomposition demande une connaissance "protomathématique" que je n'ai pas identifiée précédemment, et qu'on pourrait décrire ainsi:

$\kappa\uparrow_{E\text{-}1}$ connaissance d'une tactique d'étude des implications

- *$\kappa\uparrow_{E\text{-}1}7$ dans une proposition contenant une implication et d'autres connecteurs logiques (ou, et), il est préférable de ne pas "distribuer" l'implication*

Etude de C6 dans la situation S-1

C6: Si L1 ou L6 alors L2 ou L4

Les concomittances concernant les éléments en présence sont:

1) (L1, L4, non L2) (S1, Ti)
2) (L6, non L4, non L2) (S3, Ti)

Ces concomittances conduisent à l'étude d'assertions moins complexes liées à l'assertion étudiée: Si L1 alors L4 ou L2 Si L6 alors L4 ou L2.

La première est vraie, la seconde est fausse. Pour conclure, il faut alors des connaissances sur la "distribution" du "ou" dans une implication logique ($\kappa\uparrow_{E\text{-}1}5$ et $\kappa\uparrow_{E\text{-}1}6$).

On peut d'ailleurs envisager de réitérer le processus de décomposition de manière à ne traiter que des implications de type <si Li alors Lj> mais cette procédure est particulièrement complexe.

Mais on peut également ($\kappa\uparrow_{E\text{-}1}7$) ne pas décomposer en plusieurs implication et n'employer que les connaissance $\kappa\uparrow_{E\text{-}1}3$ et $\kappa\uparrow_{E\text{-}1}4$. Il faut considérer les assertions élémentaires <L1 ou L6> et <L2 ou L4>, l'hypothèse <L1 ou L6> est vraie dans les deux cas, la conclusion <L2 ou L4> est fausse dans le deuxième cas: hypothèse vraie, conclusion fausse, il s'agit d'un contre-exemple. Cette résolution n'est pourtant pas naturelle étant donné le milieu de référence envisagé, car l'étude des concomittances envisage a priori le plus de lampes possibles (ici 3).

On peut noter ici que les connaissances que j'ai décrite dans la catégorie "logique courante" n'interviennent pas, le fonctionnement de ces connaissances ne permet pas de conclure.

Etude de C7 dans la situation S-1

C7: Si L6 alors non-L1 ou non-L2

L'étude des concomittances pour C7 conduit à un unique cas possible:
(L6, non L1, non L2) (S3, T2).

La vérité de C7 est donc triviale, elle ne demande que des connaissances de niveau -2.

Du point de vue des connaissances en jeu, C7 romp donc avec une certaine "progressivité" du traitement des assertions en jeu qui se dégageait précédemment.

La position P-1 déduite des niveaux négatifs

En général, P-1 "observe"[8] E-1 en situation a-didactique; il n'intervient pas sur les connaissances $\kappa\uparrow_{E\text{-}1}$ en cours d'apprentissage, ce qui signifie qu'il doit être en mesure de les identifier quand elles se présentent, de manière à évaluer les interventions qu'il devra contrôler en position P0 (phases de conclusion, institutionnalisation). Il est susceptible d'intervenir sur des connaissances $\kappa\uparrow_{E\text{-}2}$ ou $\kappa\uparrow_{E\text{-}3}$ s'il pense que la situation S-1 ne peut se dérouler de façon satisfaisante.

Les connaissances spécifiques de P-1 qu'il est possible d'identifier par une analyse ascendante (qui part du niveau -3) correspondent à la connaissance partielle de l'analyse a priori précédente. Pour aller plus loin dans la description de ces connaissances, il serait nécessaire de tenir compte du rôle *d'observateur* de P-1, c'est à dire de décrire comment les connaissances de E-1 vont se manifester à un observateur. On peut néanmoins retenir (dans une description qui n'est pas encore assez relative à l'observation) ici:

$\kappa\uparrow_{P\text{-}1}$ *connaissance sur les preuves des assertions discutées*[9]

[8]Le qualificatif de "dévolueur" seraît plus adapté (mais si laid!), car il faut rappeler que la position qui correspond à la dévolution n'est pas celle d'observateur muet.

[9]Du point de vue des notations, j'utilise ici les symboles connus par l'enseignant.

- $\kappa\uparrow_{P\text{-}1}1$ *concernant C4*

la preuve de C4 peut s'envisager de deux façons différentes (décomposition en <<L2⇒ L5> ou <L2 ⇒ L4>>ou bien en <L2 ⇒<L4 ou L5>>

- $\kappa\uparrow_{P\text{-}1}2$ *concernant C6*

la preuve de C6 peut s'envisager de trois façons différentes (décomposition en <<L1⇒<L4 ou L2>> ou <L6⇒ <L4 ou L2>>>; ou encore en 4 assertions, avec un risque très fort d'errreur dans les connecteurs (et/ou); ou encore en traitement "direct" <<L1 ou L6> ⇒ <L4 ou L2>>

- $\kappa\uparrow_{P\text{-}1}3$ *concernant C7*

la preuve de C7 est triviale

D'un point de vue général, l'enseignant étudié ici montre une prise de conscience de la nécessité mais aussi de la difficulté de la position P-1:

> [Parmi les jeux de l'enseignant: épistémologique, didactique, social, Marc Legrand 1993 précise le jeu épistémologique] le professeur doit être le plus conscient possible, à chaque instant, de tout ce qui est mathématiquement mis en discussion. […] En clair, l'enseignant doit pouvoir contrôler épistémologiquement le débat. […] Si pour des raisons épistémologiques, cognitives, éthiques, l'enseignant s'interdit absolument de manipuler le débat au sens où il tenterait de faire dire aux élèves des choses qu'ils ne pensent pas vraiment, il ne peut pas non plus tout laisser venir dans le désordre. A la suite de quelques échanges, l'enseignant doit donc choisir très rapidement quel point va être discuté avant, après ou contradictoirement à tel autre: il ne doit pas désigner ce qui est pertinent et ce qui ne l'est pas, mais il doit organiser le débat de telle sorte qu'un élève "normal" puisse le suivre, c'est à dire n'ait pas à prendre en compte simultanément trop de raisons se situant sur des plans trop différents. (pp. 127-128)

2.4. Les niveaux positifs émergeant des niveaux a-didactiques

Le niveau 0: situation didactique

M0: **M-d'apprentissage**	**E0:** **Elève**	**P0:** **Professeur**	**S0:** **situation didactique**

Si l'on déduit le niveau 0 à partir du niveau -1 comme on l'a fait précédemment, on obtient comme milieu d'apprentissage les objets produits par la situation d'apprentissage, ici les valeur de vérité des propositions.

Le sujet E0, *élève* au sens strict, est confronté à une situation didactique dans laquelle il doit rendre compte publiquement pour le Professeur des réponses aux questions qui lui ont été posées, ici il doit prouver les valeurs de vérité des propositions.

Dans le domaine de la preuve, nous pouvons envisager les connaissances suivantes (qui peuvent être en cours d'institutionnalisation):

$\kappa\uparrow_{E0}$ *connaissances sur les preuves des assertions*

• *$\kappa\uparrow_{E0}1$ pour prouver qu'une affirmation est fausse, il suffit de trouver un contre-exemple*

• *$\kappa\uparrow_{E0}2$ pour tester une assertion, on peut regarder tous les cas possibles, s'il n'y a pas de contre-exemple, l'assertion est vraie*

La situation S0 peut donc être décrite comme le débat sur la validité des preuves des assertions. Mais la situation S0, comme toute situation *didactique*, comprend également potentiellement les phases de conclusion sur les résultats obtenus dans les phases a-didactiques, ainsi que l'institutionnalisation de certaines connaissances en cours d'apprentissage ($\kappa\uparrow_{E-1}$ notamment).

On peut donc considérer que P0 doit ici utiliser les observations réalisées en P-1 (il s'agit d'un élément du milieu M-1) pour décider quelles sont les interventions publiques (évaluations et institutionnalisations) qu'il est raisonnable de faire.

Marc Legrand décrit ainsi sa conception de l'institutionnalisation:

> «L'institutionnalisation est ce moment où l'enseignant sort totalement de sa neutralité épistémologique pour étiqueter, parmi les résultats étudiés, ceux qui seront certainement réutilisés: ceux qui sont vrais deviennent les théorèmes du cours, et ceux qui sont erronés mais qui correspondent à des modes de pensée très "naturels" sont repérés comme tels (i.e. on sait qu'ils sont faux et on sait qu'on "aimerait bien" qu'ils soient vrais!) Dans ce contexte, le professeur réaffirme donc que ce n'est pas du temps perdu que de produire des énoncés faux et de s'en rendre compte, et que c'est une véritable connaissance scientifique que de savoir que tel raisonnement, telle méthode, tel résultat n'aboutit pas dans telle ou telle situation.» (p. 132)

D'après cette conception de l'institutionnalisation, on peut donc s'attendre, d'après notre analyse de la situation d'apprentissage, à l'institutionnalisation:

• du rejet de certaines connaissances de "logique courante" ($\kappa\uparrow_{E-1}1$ et $\kappa\uparrow_{E-1}2$)

• des définitions relatives aux connecteurs logiques "ou", "et", "$\Rightarrow$" ($\kappa\uparrow_{E-1}3$ et $\kappa\uparrow_{E-1}4$)

• d'une connaissance tactique ($\kappa\uparrow_{E-1}7$) de manière à ne pas accorder trop d'importance à des connaissances de logique trop spécialisées ($\kappa\uparrow_{E-1}5$ et $\kappa\uparrow_{E-1}6$)

Les connaissances de P0 seront donc:

$\kappa\uparrow_{P0}$ connaissances sur les conclusions des conjectures

• *$\kappa\uparrow_{P0}1$ C4 vraie, C6 fausse, C7 vraie (si la validation a eu lieu dans le débat, il n'est pas nécessaire d'évaluer)*

$\kappa\uparrow_{P0}$ connaissances sur la possibilité de l'institutionnalisation des connaissances

• *$\kappa\uparrow_{P0}2$ identification des connaissances ont été en jeu dans les débats*

• *$\kappa\uparrow_{P0}3$ appréciation de la pertinence de l'institutionnalisation des connaissances ci-dessus*

Le niveau 1: situation de projet

M1: M-didactique	E1: E-réflexif	P1: P-projeteur	S1: situation de projet

Le milieu M1 obtenu à partir du niveau 0 s'obtient à partir des objets produits dans la situation didactique, c'est à dire: la validité des preuves des assertions et les connaissances institutionnalisées.

E-réflexif interagit avec M1 pour s'interroger sur les conditions d'établissement des preuves et des connaissances institutionnalisées. S1↑ peut donc être décrite comme la situation d'étude des raisons des règles de la preuve mathématique.

$\kappa\uparrow_{E1}$ *connaissance sur les raisons des règles de la preuve mathématique*

- $\kappa\uparrow_{E1}1$ *la raison d'être des règles "dichotomique" de la preuve mathématique est la garantie d'universalité*

Les connaissances de P1 sont en "miroir" de celle de E1:

$\kappa\uparrow_{P1}$ *connaissances sur le projet d'enseignement des mathématiques à l'université*

- $\kappa\uparrow_{P1}1$ *l'élève doit éprouver et comprendre les raisons des règles de la preuve mathématique*

2.5. Les niveaux sur-didactiques: analyse "descendante"

Niveau 3: situation noosphérienne

M3: M-de construction		P3: P-noosphérien	S3: situation noosphérienne

La situation noosphérienne prend place ici dans une noosphère élargie à la communauté des chercheurs en didactique, à laquelle Marc Legrand appartient. Dans le cadre d'une des première leçons en DEUG première année, la situation noosphérienne pourrait être décrite ainsi: créer les conditions nécessaires à un enseignement de mathématiques respectant les règles du de la preuve mathématique et du "débat scientifique"[10].

Les connaissances de niveau 3 sont donc:

$\kappa\downarrow_{P3}$: *connaissances sur les conditions nécessaires au débat scientifique*

- $\kappa\downarrow_{P3}1$ *l'erreur doit avoir un statut qui permette aux étudiants de ne pas avoir peur de s'exposer publiquement*

> «Ces protagonistes [du débat] prennent effectivement un risque, celui de dire en public ce qu'ils pensent personnellemnt et de le soutenir avec leurs propres arguments (les arguments qui les persuadent intimement que c'est vrai ou faux);

[10] Ce terme est pris ici au sens d'une "didactique" particulière.

> ils peuvent donc se tromper, et dans ce cas ils savent que le débat va mettre leur erreur au grand jour. Ils ne contienueront donc à jouer ce jeu dangereux que s'ils sont protégés par un statut officiel de l'erreur […].
> A notre sens, c'est au professeur de donner un statut scientifique à l'erreur dans les phases de recherche […]: montrer à la "classe" ou à "l'amphi" que ceux qui interviennent en prenant le risque d'une plus grande implication personnele s'offrent à eux-mêmes et offrent aux autres des occasion de comprendre en profondeur les mathématiques […]. » (p. 124)

$\kappa\downarrow_{P3}$: *connaissances sur l'intérêt du débat scientifique*

- $\kappa\downarrow_{P3}2$ *le débat scientifique permet l'expression d'assertions fausses, le rejet de ces assertions fait partie de la construction des connaissances*

> «Or, nous avons pu constater, à maintes reprises, que c'est précisément autour de ces conjectures assez naïvement fausses ou non pertinentes que se font le plus efficacement l'apprentissage et l'approfondissemnt des règles du jeu de la rigueur mathématique.» (p. 134)

$\kappa\downarrow_{P3}$: *connaissances sur la nature des règles du débat scientifique*

- $\kappa\downarrow_{P3}3$ *les règles de la preuve mathématique sont identifiables aux règles du débat scientifique en mathématique*

Le milieu de construction avec lequel P3 interagit est ici la suite des situations des situations "les règles du débat mathématiques" ou "circuit" M3.

- $\kappa\downarrow_{P3}4$ *les règles de la preuve mathématique sont causées par la vocation d'universalité des mathématiques*

$\kappa\downarrow_{P3}$: *connaissances sur la compréhension des règles de la preuve mathématique*

- $\kappa\downarrow_{P3}5$ *les règles de la preuve mathématique rentrent en conflit avec les règles du "raisonnement courant"*

Niveau 2: situation de construction

M2: M-de projet		P2: P-constructeur	S2: situation de construction

La situation S2 est égale au milieu M3, c'est-à-dire que S2 correspond à la construction de la suite des situations "circuit ou les règles du débat mathématique".

Les connaissances vont être de plusieurs nature, suivant qu'elles se réfèrent plutôt à la preuve mathématique ou à la logique, qui sont les pratiques et savoirs en jeu dans la suite des situations construites.

$\kappa\downarrow_{P2}$: *connaissances sur les règles de la preuve mathématique*

- $\kappa\downarrow_{P2}1$ *la règle du contre-exemple est fondamentale*

> «En mathématiques, avec le principe "un contre-exemple suffit" pour montrer la fausseté d'une conjecture, nous détenons un remarquable outil de régulation du débat.» (p. 130)

- $\kappa_{\downarrow P2}2$ *cette règle rentre fortement en conflit avec le raisonnement courant dans lequel "une exception confirme la règle"*

$\kappa_{\downarrow P2}$: *connaissances sur les difficultés d'ordre logique*

- $\kappa_{\downarrow P2}3$ *la logique courante rentre en conflit avec la logique mathématique*
- $\kappa_{\downarrow P2}4$ *les "tables de vérité" ne permettent pas de résoudre ce conflit*

Le milieu avec lequel P2 interagit dans la situation de construction comprend l'ensemble des situations dans lesquelles la logique "courante" rentre en conflit avec la logique mathématique; M2 comprend également les situations dans lesquelles le débat de preuve mathématique peut prendre place, en opposition avec celles dans lesquelles il y a dysfonctionnement du débat. Il est à noter que P2 a un rôle passé, présent, et futur qui interagit avec les situations dans toutes les positions positives, par exemple, M2 est constitué aussi bien: de situations vécues dans le passé; de celles qui sont constituées par l'observation de la situation en cours; de l'anticipation de celles qui sont prévues pour le futur.

Niveau 1: situation de projet

M1: M-didactique	E1: E-réflexif	P1: P-projeteur	S1: situation de projet

La situation S1↓ est égale au milieu M2, le projet est donc d'installer une situation qui permette la prise de conscience des dysfonctionnements du raisonnement courant de la logique courante. P1 peut institutionnaliser des règles de preuves et des propriétés logiques en opposition avec l'argumentation et la logique courantes.

Les connaissances de P1 sont donc celles qui justifient et sous-tendent les choix opérés dans la construction de la séquence (passée) et dans sa gestion (présente).

$\kappa_{\downarrow P1}$ *connaissances sur le savoir "logique" et ses apprêts didactiques*

- $\kappa_{\downarrow P1}1$ *le contexte des circuits électriques permet de poser des problèmes de logique pour lesquels la logique courante n'est pas pertinente*
- $\kappa_{\downarrow P1}2$ *les conflits obtenus devront être résolu par un débat de preuve*
- $\kappa_{\downarrow P1}3$ *le contexte des circuits électrique permet d'obtenir un nombre fini de cas à examiner, ce qui rend possible la preuve par exhaustion et favorise la recherche d'un contre-exemple*

$\kappa_{\downarrow P1}$: *connaissance sur certaines difficultés spécifiques de la logique*

- $\kappa{\downarrow}_{P1}4$ *les assertions du type ((a ou b)⇒(c ou d)) (dans lesquelles a, b, c, d, sont des assertions simples, éventuellement manquante) sont d'un traitement complexe pour les étudiants de DEUG A.*

$\kappa{\downarrow}_{P1}$ *connaissance sur les règles de la preuve mathématique à institutionnaliser*

- $\kappa{\downarrow}_{P1}5$ *les règles de la preuve mathématique ne sont pas identifiques aux règles du "raisonnement courant"*
- $\kappa{\downarrow}_{P1}6$ *un contre-exemple suffit à rejeter une assertion*
- $\kappa{\downarrow}_{P1}7$ *on peut prouver une assertion en établissant tous les cas possibles*

Le milieu didactique M1 avec lequel P1 interagit dans la situation de projet comprend ici l'ensemble des situations vécues par Marc Legrand, qu'il s'agisse de la situation "circuit ou les règles du débat" (passée et présente) ou des situations utilisant le débat scientifique du point de vue de la difficulté d'établissement d'un contrat didactique approprié.

Le milieu avec lequel E1 interagit correspond à la partie "présente" de ce milieu M1. Dans la position E-réflexif, il est donc possible qu'il partage certaines connaissances $\kappa{\downarrow}_{P}$ qui ne sont pas destinées à l'apprentissage ou l'institutionnalisation.

$\kappa{\downarrow}_{E1}$ *connaissances sur les conditions du débat mathématique*

- $\kappa{\downarrow}_{E1}1$ *un seul peut avoir raison contre tous*
- $\kappa{\downarrow}_{E1}2$ *pour être valable, une preuve doit être comprise et acceptée*
- $\kappa{\downarrow}_{E1}3$ *savoir faire des mathématiques, c'est aussi savoir rejeter les preuves fausses*

2.6. Les niveaux négatifs émergeant des niveaux sur-didactiques

Le niveau 0: situation didactique

Si l'on déduit le niveau 0 à partir du niveau 1 comme on l'a fait précédemment, on obtient ici comme situation didactique S0 (égale au milieu M1 "présent", c'est à dire vu par l'élève (E1-> E0) et le professeur) la situation d'épreuve et d'établissement des règles de la preuve mathématique.

Les connaissances en jeu pour le professeur sont celles qui lui permettent de prendre des décisions didactiques dans le présent de la situation, ce que décrit Marc Legrand:

> [dans la catégorie du «jeu didactique]
>
> L'enseignant ne doit donc pas laisser le débat se dérouler au rythme de sa propre compréhension ou de celle de ses meilleurs élèves; pour cela, il écrit au tableau ce qui se dit afin, d'une part, de ralentir la vitesse des échanges et d'autre part, de constituer une mémoire des idées fortes (vraies ou fausses), de telle sorte que chacun puisse en (re)discuter. […] Ces arguments [produits dans le débat], le professeur les reprendra au moment de l'institutionnalisation pour

> mettre en avant ce qui est vrai (et à retenir en tant que tel) et ce qui est faux (et à retenir plus encore en tant que savoir erroné). (p. 129)
>
> [dans la catégorie du «jeu social»]
>
> Le professeur doit donc, à maintes reprises, expliquer à ses élèves la signification épistémologique et cognitive d'une certaine forme de désordre, d'une incertitude prolongée, du conflit cognitif; il doit régulièrement redonner un sens didactique à ses silences et à son refus de prendre parti, faute de quoi il risque de passer pour un incompétent et sur le plan didactique et sur le plan épistémologique. (p. 130)

Il faut ici décrire en terme de connaissances ce qui peut soutenir ces actions *dans cette situation particulière* (et non pas en général), je ne retiendrais ici que:

$\kappa\downarrow_{P0}$ *connaissances sur les règles de la preuve mathématique à institutionnaliser*

- $\kappa\downarrow_{P0}1$ *un contre-exemple suffit*
- $\kappa\downarrow_{P0}2$ *on peut prouver une assertion en examinant tous les cas possibles et en les classant en "exemple", "contre-exemple", "hors-sujet"*

En ce qui concerne l'élève, s'il se trouve dans la situation S0 décrite, il doit se confronter au débat de preuve mathématique, s'y lancer, en quelque sorte, pour en éprouver les règles. Le problème posé ("circuit") servant alors de milieu d'apprentissage (M0) à cette situation didactique. Il ne s'agit pas tant, dans cette situation S0, de produire des réponses aux questions posées (valeur de vérités des assertions et preuve de cette valeur), que de découvrir les règles nécessaires au débat et à la preuve (voir les connaissances identifiées pour E1). Certaines des connaissances de l'élève sont liées à l'établissement d'un nouveau contrat didactique (celui de l'amphi de mathématiques de la première année universitaire, avec un enseignant de mathématiques donné).

$\kappa\downarrow_{E0}$ *connaissances sur le contrat didactique en cours d'établissemnt*

- $\kappa\downarrow_{E0}1$ *ce qui est écrit au tableau n'est pas toujours vrai*
- $\kappa\downarrow_{E0}2$ *s'engager dans le débat est valorisé même en cas d'erreur*

Le niveau -1: situation d'apprentissage

M-1: M-de référence	E-1: E-apprenant	P-1: P-observateur	S-1: situation d'apprentissage

Si l'on déduit le niveau -1 à partir du niveau 0, on obtient ici comme situation a-didactique d'apprentissage S-1↓ la résolution complète du problème posé dans les consignes "circuit".

Les connaissances en jeu pour P-1 sont donc celles qui doivent lui permettre d'obtenir un déroulement a-didactique pour "l'amphi" considéré comme une mini-communauté scientifique, c'est-à-dire en particulier les connaissances qui lui permettent d'obtenir des phases de validation en ce qui concerne les valeurs de vérité des assertions en jeu. Il s'agit notamment de connaissances sur le moyen de provoquer ou au contraire d'arrêter un débat dans un moment compatible avec le projet (P1), et avec la position P-1.

$\kappa{\downarrow}_{P-1}$ *connaissance sur le déroulement des phases de conclusion dans la situation "circuit"*

- $\kappa{\downarrow}_{P-1}1$ *la situation "circuit" provoque des conflits entre logique mathématique et logique courante, qui peuvent être résolu par des échanges d'arguments acceptés entre des élèves de niveau DEUG A*

- $\kappa{\downarrow}_{P-1}2$ *la conjecture C7 (résolution immédiate) arrivant en dernière position , la dernière conclusion conduit à un concensus*

Les connaissances supposées en cours d'apprentissage pour E-1 sont donc les connaissances concernant la logique mathématique et ses relations avec la logique courante.

$\kappa{\downarrow}_{E-1}$ *connaissances sur la logique*

- $\kappa{\downarrow}_{E-1}1$ *<a ou b> est vraie dans les cas (a, b), (a, non b), (a, non b); elle est fausse dans le cas (non a, non b)*
- $\kappa{\downarrow}_{E-1}2$ *<si a alors b> est vraie dans les cas (a, b), (non a, b), (non a, non b); elle est fausse dans le cas (a, non b)*

$\kappa{\downarrow}_{E-1}$ *connaissances sur la relation entre logique courante et logique mathématique*

- $\kappa{\downarrow}_{E-1}3$ *la logique courante rentre en conflit avec la logique mathématique*

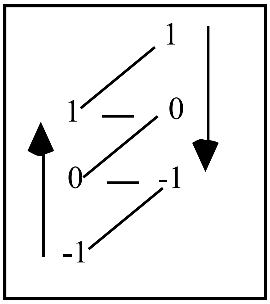
2.7. Conclusion de l'analyse a priori

Dans l'annexe 3, se trouve un résumé des situations et des connaissances identifiées par les analyses descendante et ascendante. En conclusion de l'analyse a priori, nous allons comparer les niveaux 1, 0 et -1 obtenus à partir des deux analyses.

Nous pouvons remarquer qu'il y a une une certaine “tension” entre les analyses descendantes et ascendantes. Si l’on regarde les connaissances identifiées pour l’élève dans les deux analyses, on constate que les connaissances identifiées dans la situation d’apprentissage dans l’analyse ascendante (c’est à dire d’une certaine façon du point de vue de l’élève) sont nombreuses et se rapportent spécifiquement à des savoirs logiques, alors que dans l’analyse descendante (du point de vue du professeur), ces connaissances sont plus réduites et se doublent d’une connaissance sur les relations entre logique mathématique et logique courante qui est en relation “méta” par rapport aux connaissances identifiées et devrait donc se trouver dans un niveau supérieur.

D’autre part, dans les niveaux positifs, les connaissances identifiées pour l’élève dans l’analyse ascendante relève de la preuve mathématique alors que dans l’analyse descendante, ce sont les conditions du débat de preuve qui sont mises en avant.

En grossissant le phénomène, on pourrait schématiser cette “torsion” par le schéma suivant:



Ce qui est, dans l'analyse descendante (qui caractérise les positions de l'enseignant), de l'ordre de la situation didactique, serait, dans l'analyse ascendante (qui caractérise les positions de l'élève), plutôt de l'ordre de la position réflexive.

Ce résultat me permet d'expliquer l'insistance (à juste titre) d'Hélène Di Martino et Marc Legrand au sujet de l'importance du "méta" dans cette situation. Cette insistance traduit bien une volonté de la part de l'enseignant, dans cette situation, de "tirer" l'élève vers un niveau qui n'est pas le niveau normal de la situation didactique dans laquelle il devrait normalement se trouver (le niveau 1 est bien un méta niveau par rapport au niveau 0, comme tout niveau n+1 par rapport au niveau n).

On trouve par exemple, dans le compte-rendu du TD, la citation suivante relative à un épisode particulier du protocole:

> «Notre analyse du comportement "anormal" de l'enseignant dans cette situation est la suivante: la position minoritaire qui est fausse doit être protégée par le professeur […] Comme cette "méta-connaissance" sur les raisons qui nous conduisent à nous tromper en logique "pratique" est la connaissance principale de la séquence, on peut remarquer que l'enseignant ne relèvera même pas une remarque très importante d'un étudiant qui précise que le "ou" mathématique est un "ou" inclusif; il "laisse tomber" cette "bonne remarque" car elle se situe à un autre niveau (celui des conventions) et il sait qu'il aura l'occasion de revenir sur cette question dans des conjectures ultérieures.» (Di Martino-Legrand 1993, p. 80)

Si notre analyse est exacte, on devrait constater dans le protocole un jeu du professeur dans une situation didactique un peu “élastique”, tirant tantôt du côté de l’enseignement de connaissances logiques, tantôt du côté d’établissement de règles du débat de preuve mathématique. On devrait également constater une certaine propension des étudiants à rechercher l’institutionnalisation de connaissances de logique, dans un jeu qui ramènerait l’enseignant sur le terrain de la conclusion des preuves des assertions.

3. Analyse a posteriori détaillée

J'ai choisi de reproduire le protocole intégralement, dans la mesure où celui-ci n'a jamais été publié par Di Martino et Legrand (texte en retrait, caractères Geneva). Dans le protocole, je note μ pour l'enseignant et ε pour un élève. La numérotation des paragraphes correspond aux paragraphes du protocole transmis par Hélène Di Martino. Mon analyse est insérée tout au long du texte, elle correspond au commentaire des parties du protocole reproduites en italiques.

3.1. Introduction (intervention 1μ)

1 μ: …Dernier point, quelqu'un est venu (inaudible) me voir pour dire, "Mais quand est-ce qu'on commence le programme ?". J'affirme : ceci est au programme explicite de toutes les sections de Deug, *le fait de discuter sur les fondements des mathématiques, les règles de la logique est écrit noir sur blanc dans le programme commun de toutes les sections de Deug*,

μ négocie ici la poursuite de la situation en s'appuyant sur une situation d'enseignement des règles de la logique(S0↑). Il faudra être attentif par la suite à l'existence ou non d'institutionnalisation de connaissances de logique.

il est possible que dans les autres sections, ce problème soit traité beaucoup plus rapidement… en faisant l'implicite que toutes ces choses là, vous les connaissez bien, et que c'est pas la peine de perdre du temps dessus. Il me semble que toutes nos discussions prouvent que… on ne perd pas son temps, et qu'en fait, c'était pas si clair que ça en avait l'air. J'ai discuté avec certains d'entre vous tout à l'heure, pour vous dire: *on pourrait très bien vous résumer tout ça dans des tables de vérités, que vous connaissez.*

Les étudiants entrés en première année de DEUG en 1992 ne connaissent pas les tables de vérité, qui ne sont plus au programme des lycée. Il s'agit donc là d'une "fiction assumée" (Brousseau et Centeno 1992). La fonction de cette fiction assumée pourrait faire partie de la négociation de S-1, dans la mesure où les tables de vérités pourraient constituer un milieu pour la validation des conjectures, et donc garantir la possibilité d'une situation a-didactique pour les questions posées (ce qui correspond exactement à S-1↓).

Simplement on a la preuve que les tables de vérité ne règlent pas le problème de la logique quand on l'applique.

Cette affirmation correspond à une connaissance identifiée comme $\kappa_{\downarrow P2}3$. Dans ce passage, μ intervient comme P2 (P-constructeur) en explicitant certaines raisons de sa construction didactique.

Vous avez plein de gens qui savent parfaitement faire fonctionner les tables de vérité, qui ne se trompent jamais devant une table de vérité, et qui font plein d'erreurs de logique quand il s'agit de l'utiliser en action à un endroit où c'est plus des tables de vérité, mais c'est des équations, c'est des intégrales, parce que dès qu'on est dans l'action, c'est le bon sens du commun qui revient, c'est-à-dire que c'est notre circuit électrique, toutes les réactions primaires entre guillemets que l'on a, et bien on les a dans les calculs, parce que on veut travailler avec notre bon sens, parce que… on veut travailler avec notre bon sens, et avec notre bon sens, dire que H_n entraîne H_{n+1} alors qu'on sait que H_n est faux, avec notre bon sens, ça nous paraît absurde, et donc on dit c'est tout faux, d'accord ? Mais les tables de vérité ne règlent absolument pas ce problème-là, parce qu'on vous dit si P et Q, etc. et tout, comme P et Q vous les connaissez pas, vous avez aucune envie de dire que c'est absurde, ça marche bien sur les tables de vérités. Tandis que là, quand P et Q veulent dire quelque chose de précis, et que vous vous apercevez que P est impossible, alors vous dites je veux pas discuter de P entraîne Q parce que je sais que Q est impossible, et donc ici, vous avez des réactions de bon sens entre guillemets, et *le but, c'est qu'on ait ces réactions ici, de façon à ce que quand on va les avoir en action, on dise d'un seul coup "Ah mais on est en train de faire exactement la même faute de raisonnement dont on a discuté* *l'autre jour"*, et ayant pris conscience que c'était la même faute de raisonnement, on évite de la faire, ou on se rend plus rapidement compte qu'on est en train de la faire.

μ situe ici la situation didactique d'une autre manière: elle doit constituer une expérience *des erreurs* dont il faudra se souvenir. En ce sens, il s'agit de l'expression, dans un cas particulier, de la connaissance que j'ai identifié en général comme $\kappa{\downarrow}_{P3}2$.

C'est pourquoi je pense pouvoir conclure l'analyse de cet épisode introductif de μ en indiquant qu'il s'agit essentiellement de faire la dévolution de la situation S-1↑, tout en restant ambigu sur ce qu'il sera effectivement institutionnalisé à l'issue de la séquence, c'est à dire que la nature de la situation didactique envisagée.

3.2. Conjecture C4 (interventions 2-34)

2 μ: On passe à la conjecture suivante :

C4 : Si L2 alors L5 ou L4

3 μ: …toujours avec la convention : affirmer L, ça veut dire L est allumée. Si on disait qu'elle était éteinte, on dirait non L. Donc là, la conjecture, c'est : si la lampe 2 est allumée, alors la lampe 5 ou la lampe 4 est allumée… sont allumées

4 μ: Tout le monde est décidé ? Oui ou non ? *Quand vous avez pas le temps, vous le dites, je vous donne deux minutes de plus, sinon c'est pas la peine si tout le monde a pris une décision…*

5 μ: Ça va ? Bien… *Alors quels sont ceux qui ne veulent pas décider du vrai ou du faux, qui se mettent dans "autre" par rapport à cette conjecture n° 4.* Zéro autre. Quels sont ceux qui considèrent qu'elle est vraie ?… Donc il y a beaucoup de gens qui considèrent qu'elle est vraie… Quels sont ceux qui considèrent qu'elle est fausse ? Un, deux, trois, quatre… faut pas avoir peur… cinq ? Cinq personnes considèrent qu'elle est fausse…

V	F	Autre
presque tous	5	0

6 μ: Bien… allons-y…

7 μ: E*xprimez vos raisons pour lesquelles vous considérez que c'est vrai, ou vous considérez que c'est faux.* Oui…

On peut remarquer que, dans tout ce passage, μ est en position de dévolution (P-1) par rapport à la situation de preuve de la conjecture C4. Par contre, il intervient explicitement (P0↓) par rapport à l'établissement des règles du débat scientifique (S0↓).

8 ε1 : … moi je pense que c'est faux parce que… on aurait… deux cas possibles : soit L2, si L2 est allumée, on a L5 allumée… soit on a L4 allumée. Alors dans un cas c'est possible, mais on peut jamais avoir L4 allumée si on allume L2…
(Brouhaha)

ε1 paraît ici raisonner selon un amalgame logique courante ($\kappa{\uparrow}_{E-1}1$) / logique mathématique, dans lequel une proposition qui n'a pas de sens devient une proposition fausse. D'autre part, comme je l'avais décrit dans l'analyse a priori, pour prouver que C4 est fausse, ε1 réalise une décomposition de C4 assimilable à <<si L2 alors L5> ou <si L2 alors L4>> (ε1 dit "soit… soit" au lieu de "ou", ce qui est conforme au langage courant, mais la place des implications n'est pas claire, et l'idée de "cas" relève de la preuve par exhaustion). Cette distribution est exacte, mais ne permet pas à ε1 d'aboutir, faute notamment d'une utilisation correcte des cas de vérité du "ou" ($\kappa{\uparrow}_{E-1}3$).

9 µ: Donc vous dites… (écrit L2 et L5) ça c'est possible, *et c'est même certain*, hein, quand L2 est allumée, L5 est allumée, donc non seulement c'est possible, *mais c'est certain…* et ça (L2 et L4) *c'est certainement impossible*, d'accord… donc vous dites, avec le circuit tel qu'il est fait, quand L2 est allumée, on est certain que L4 n'est pas allumée, donc demander en même temps ces deux trucs là, donc vous dites, c'est pas possible. Et du coup, et bien, vous dites que c'est faux, d'accord… parce que il y a un des deux cas qui fonctionne pas, d'accord…

On remarque ici une intervention d'évaluation de µ en ce qui concerne la situation S-2 (dans la mesure où il prend partie clairement sur les relations de concomittance). Cette intervention ne remet pas en cause la position P-1.

10 ε2 : Ça reviendrait à poser la conjecture comme : si L2, alors L5 et L4… (Brouhaha)

Cette tentative d'interprétation de ε2 ne correspond pas à ce que propose ε1 (voir intervention13, 15, 17 de ε1), par contre, la conjecture ainsi énoncée est une transformation de la conjecture C4.1 identifiée dans l'analyse a priori comme découlant des règles de concomittance (si L2, alors L5 et non-L4).

11 ε1 : Non, non parce que si on dit…

12 µ: Attendez, juste une seconde, j'écris ce qu'il nous dit…donc vous dites, ça reviendrait à poser la conjecture : si L2, alors L5 et L4, qui serait une autre conjecture, qu'on pourrait appeler C'4… *Voyez que je fais attention à chaque fois que quelqu'un propose une conjecture différente, je lui donne un nom différent pour pas qu'on mélange plusieurs énoncés, ils disent peut-être la même chose, mais en tous cas, dans la formulation, ils sont différents.* Oui…

µ en position P0↓ au sujet des règles du débat, cf ci-dessus.

13 ε1 : Non parce que si on a Si L2, alors L5 et L4, ça voudrait dire que L5 et L4 s'allument simultanément…

14 µ: Oui… donc vous dites… ça voudrait dire que L5 et L4 s'allument simultanément, *et ça à nouveau, vous dites L5 et L4 c'est pas possible…*

Ajout erroné de P-1, qui ne correspont pas à une évaluation

15 ε1 : Non mais je veux dire que… C'4 elle retrace pas du tout ce que j'ai dit là…

16 µ: Pardon ?

17 ε1 : La conjecture C'4, elle retrace pas du tout ce que j'ai dit là, parce que ce que j'ai dit là, c'est qu'on a deux cas possibles… et que dans un cas ça marche, dans un cas ça marche pas…

ε1 confond toujours les propositions élémentaires de l'assertion décomposée avec les cas possibles.

18 µ: Oui… deux cas possibles… donc… du point de vue de la logique, on peut regarder les phénomènes élémentaires L2 et L5, dans ce cas de figure si je regarde ces deux choses-là, ça marche très bien, et si je regarde maintenant la conjonction de ces deux faits, L2 et L4 sont impossibles, et la conjecture envisage les deux possibilités, une où ça marche, une où ça marche pas, donc vous avez *une sorte de contre-exemple* qui vous permet de dire que c'est faux…

Dans cette intervention, µ montre un premier engagement dans le débat correspondant à la situation didactique vécue par les étudiants, c'est-à-dire la discussion de la valeur de vérité de C4 et de sa preuve. "Contre-exemple" marque une connaissance en cours d'institutionnalisation sur les preuve des assertions, "une sorte de" montre un certain doute sur la qualité du "contre-exemple" ainsi produit. Dans la suite, μ va accepter momentanément ce point de vue sur la situation didactique.

> 19 ε1 : Tandis que C'4, c'est un seul cas, c'est… on a L2… qui entraîne que L4 et L5 s'allument simultanément…
>
> 20 μ: … Alors vous dites, ça c'est tout à fait différent, parce que à ce moment-là, dans l'autre, on dit si L2, alors on devrait avoir en même temps L5 et L4, ça c'est une conclusion impossible, *donc si la conclusion est impossible, et que l'hypothèse est réalisable, ça devient faux*, d'accord ?… Alors… vous vouliez réagir…

μ confirme son engagement dans la situation didactique de discussion des preuves.

> 21 ε3 : L'énoncé nous dit en fait qu'il faut que *l'un des deux cas* soit possible, on demande pas… que si… dans l'énoncé, ça veut pas dire que si un cas est impossible, ça veut pas dire que c'est faux… on demande qu'un seul soit vérifié…
>
> 22 μ: Oui… donc vous, dans votre lecture de l'énoncé, pour que ça marche, il suffit qu'*une des deux conclusions* marche… hein… or vous dites il y a une des deux conclusions qui marchent, à savoir L5, l'autre ne marche pas, mais ça me gêne pas de la façon dont c'est écrit… d'accord ?… donc vous vous interprétez… pour que C4 soit vraie, il suffit que L5 ou bien L4… (écrit)… vous vouliez intervenir derrière ou non ?… Oui…

Ce glissement (cas/conclusion) confirme un engagement didactique (et non plus a-didactique), mais également une certaine incompréhension concernant la confusion "décomposition en cas"/"décomposition en assertions".

> 23 ε4 : En prenant chaque possibilité, on remarque qu'il y a 5 hors-sujets, et puis un exemple qui vérifie… donc on peut dire que la conjecture est vraie…

ε4 utilise ici un raisonnement institutionnalisé précédemment concernant l'étude exhaustive des cas. En fait il se trompe car il y a trois "hors-sujets" (cas où l'hypothèse L2 n'est pas vérifiée) et deux exemples (cas où L2 est vérifiée, et où <L5 ou L4> l'est également). Cette erreur, relevant de la situation S-2, sera évaluée par μ dans l'intervention 28 sans commentaire (ce qui est normal en situation Sn, n≤-2).

> 24 μ: Alors, vous dites, j'ai fait le catalogue des possibilités, vous avez trouvé que des hors-sujets, sauf un…
>
> 25 ε4 : … sauf un exemple…
>
> 26 μ: …alors rapidement, on essaie de regarder : pour que la lampe 2 soit éclairée, il faut S dans la position 2, dès que S est dans la position 1 ou 3, ça marche pas… donc déjà dès que S est dans la position 3 ou 1, T ce qu'on veut, ça c'est des hors-sujets, donc ça, ça nous case 4 possibilités ici, il y a quatre éventualités qui n'ont pas lieu d'exister, puisque elles sont hors-sujets… maintenant on regarde les seules choses qui sont possibles pour réaliser l'hypothèse, c'est S dans la position 2, T dans la position 1, T dans la position 2. Alors, ça vous le classez comment ? S2T1, ça allume la lampe 2, et puis d'autre part, T sur la position 1, donc ça allume… ça redonde pour allumer la lampe 5… donc ça vous dites que ça marche, c'est un exemple… (brouhaha…) S2T1, ça allume la lampe 2 (brouhaha)… si vous mettez S dans la position 2, quoi que vous fassiez sur T, de toutes façons la lampe 2 se trouve allumée, d'accord ?… Donc *l'hypothèse est vérifiée*, d'accord ? Donc *maintenant, c'est soit un exemple, soit un contre-exemple, selon ce qui va se passer à l'arrivée*, d'accord… est-ce que vous êtes bien d'accord ? … pour le moment… quand S est dans la position 2, l'hypothèse est vraie, d'accord ?… maintenant pour voir la suite, *il faut regarder au niveau de la conclusion*…

Intervention de μ en position didactique vis-à-vis de la preuve.

> Alors : quand T est dans la position 1, de toutes façons la lampe 5 se trouve être éclairée, certains disent ça fait un exemple… quand T est dans la position 2, de toutes façons, le jus va directement, donc la lampe 5 est allumée. Alors pour certains, ça fait

deux exemples, et pour vous ça n'a pas l'air de faire deux exemples. Est-ce que vous voyez d'autres cas possibles ? Oui, non, je sais pas… je sais pas… pour le moment, ce que nous dit votre camarade, c'est que ça, ce sont *deux exemples*.

Evaluation de l'erreur de ε4 (qui ne fait aucun "bruit", cf Comiti-Grenier-Margolinas 1994).

Alors… est-ce que vous reconnaissez que ce sont deux exemples ou non ? *Si c'est pas des exemples, comme ils vérifient l'hypothèse, c'est forcément des contre-exemples…*

Nouvelle intervention en position didactique.

27 ε1 : J'arrive pas à comprendre sa démarche…
28 μ: Pardon…
29 ε1 : J'arrive pas à comprendre sa démarche…
30 μ: Alors est-ce que vous pouvez expliquer votre démarche, elle comprend pas…
31 ε4 : *Tout à l'heure, on a dit* on va prendre chaque cas de figure, on va l'étudier, et suivant les cas de figure, on va pouvoir dire si elle est vraie ou fausse : si on trouve un contre-exemple, c'est qu'elle sera fausse, si on trouve des hors-sujet avec des exemples, ce sera… c'est qu'elle sera vraie.

ε4 intervient en position E0 pour rappeler une connaissance ($\kappa\uparrow_{E0}1$) institutionnalisée précédemment et confortée par l'enseignant dans l'intervention 28.

32 μ: Donc il dit… il reprend la méthodologie qu'on vient d'utiliser juste pour la conjecture d'avant, en disant : passer par la négation et tout…
moi je vous ai dissuadés de le faire parce que j'avais l'impression qu'on serait pas tous d'accord sur la façon dont on prenait les choses, j'ai dit est-ce que quelqu'un peut démontrer directement, à ce moment-là on m'a proposé de faire l'inventaire de tous les cas possibles. Comme il y en a 6, c'est vite vu, et à ce moment-là, comme il n'y avait pas de contre-exemple, on a été obligés de conclure que c'était vrai… ici, il repropose de faire la même chose, alors il y a quatre cas particuliers qui sont tout de suite éliminés, ils jouent pas de rôle sur la conjecture, et puis il y a deux cas particuliers à regarder, et tous les deux conduisent à dire que ce sont des exemples, et il vous dit, comme il n'y a pas de contre-exemple, c'est vrai, mais ça va pas avec ce que vous avez dit, hein… Alors il y a quelqu'un qui voulait intervenir là-haut… oui ?…

μ réaffirme fortement cette connaissance. On peut remarquer que, bien que faisant partie de la situation didactique du point de vue ascendant (c'est à dire que point de vue de l'élève), cette connaissance est également en relation avec une connaissance du contrat didactique du débat scientifique (connaissances qui font partie de la situation didactique du point de vue du professeur), car le type de preuve acceptée ici (par exhaustion) est fortement dévalorisée dans le contrat didactique "moyen" (où elle est souvent qualifiée de "tatônnement).

33 ε5 : *Si jamais elle affirme que c'est faux, il faut qu'elle nous donne un contre-exemple…*

ε5 interprète bien les interventions de μ comme une invitation à se servir des connaissances institutionnalisées.

34 μ: Oui… et *là elle peut pas donner de contre-exemple*, puisqu'on a montré qu'il n'y en avait pas, donc pour vous, il n'y a plus de problème, c'est vrai…

μ prend ici position (évaluation concernant la vérité de C4) dans la situation S0↑. S'il n'existait pas de décalage entre deux situations didactiques, l'intervention concernant C4 serait essentiellement terminée. Dans la suite (jusqu'à l'intervention 52), μ va intervenir dans la situation didactique qu'il cherche à installer (S0↓), qui était restée masquée jusqu'à présent.

Cependant, est-ce qu'il y en a qui adhèrent au raisonnement qui est proposé, à savoir : voyez, il y a deux cas possibles, ou bien L2 et L5, et ça, ça marche, ou bien L2 et L4 et ça c'est impossible, donc c'est un contre-exemple. Non ? Moi, je prétends que c'est un argument quand même que vous allez utiliser dans la vie de tous les jours, vous allez utiliser… cet argument-là qui est soulevé ici, à mon avis il est fondé, et vous allez avoir envie de le faire fonctionner quand vous serez en train de faire des maths. Qu'est-ce qui est *pervers* dans cette conjecture, là…

μ se réfère à la connaissance $\kappa\uparrow_{E\text{-}1}2$ qu'il formule en terme de "perversité".

la perversité ne faisant pas partie de la vérité ou de la fausseté,

μ évalue ici l'erreur à la base du raisonnement de ε1 (intervention 10)

hein, c'est un autre… qu'est-ce qui est pervers d'après vous ?…

35 ε6 : Moi, c'est pour… je voudrais prendre une image, je voudrais dire qu'*elle distribue*… elle distribue, elle fait : si L2 alors L5 ou bien si L2 alors L4, elle distribue, donc…

ε6 interprète ici différememnt l'intervention de ε1. Nous avons vu que l'intervention 10 contient en effet les deux interprétations, l'une sous-tend la certitude de la fausseté de C4, l'autre faisant partie de la preuve de cette fausseté.

36 μ: … donc vous donnez une explication *de type algébrique*, elle fait une sorte de distribution de l'implication, *qui n'est pas légitime*.

μ commet ici une erreur du point de vue de la logique, car la distribution opérée par ε1 et rappellée par ε6 est exacte. Les connaissances que nous avons identifiées comme $\kappa\uparrow_{E\text{-}1}5$ et $\kappa\uparrow_{E\text{-}1}6$ ne sont en aucun cas visées dans le projet de μ (elle ne figurent pas dans les connaissances à institutionnaliser décrites dans la situation S1↓), elles sont donc si peu importante que la vigilance de μ à leur sujet est très faible. Dans l'analyse a priori, nous avons noté que l'intervention d'une connaissance de type $\kappa\uparrow_{E\text{-}1}7$ permet de "court-circuiter" toute connaissance concernant la "distribution". Si les connaissances de logiques étaient effectivement celles qui étaient visées par μ, nous devrions donc avoir maintenant des indications dans ce sens.

Mais est-ce qu'*au niveau sémantique*, il n'y a pas quelque chose aussi qui explique son intervention ? Oui…

Au contraire μ fait bifurquer ici le débat hors de la logique mathématique, ce qu'interprète immédiatement un étudiant:

37 ε7 : Ben c'est le ou… c'est le ou en maths ou *dans la vie de tous les jours*, quoi… (inaudible)

Mais ε7 intervient également en posant la question de la signification du "ou" ($\kappa\uparrow_{E\text{-}1}3$) dont l'application erronnée avait effectivement causée l'erreur de la preuve de ε1.

38 μ: Dans la vie de tous les jours, quelqu'un qui expliquerait ça, qu'est-ce qu'on lui dirait, quelle remarque vous lui feriez, quelqu'un qui vous dit ça… est-ce que quelqu'un pourrait nous donner une métaphore dans la vie de tous les jours de cette conjecture ?

39 ε8 : (inaudible)

40 μ: Pardon ? … Alors parlez plus fort parce que sinon…

41 ε8 : Je dis même avec le circuit, *on lui demanderait pourquoi L4* (inaudible)?

Cf $\kappa\uparrow_{E\text{-}1}2$

42 µ: On lui demanderait une explication sur son L4. Moi je pense que si on était dans la vie de tous les jours, quelqu'un qui nous fait une conjecture de ce type-là, on lui demande une explication sur le L4. Qu'est-ce que vient faire le L4 dans cette affaire ? … Donc vous nous avez dit… attendez-voir, ils sont partis sur des conversations particulières… vous nous avez dit le L4 me gêne ici, parce que il ne fonctionne pas… et après coup, les personnes ici qui décident que c'est vrai, nous disent, mais moi je me fiche de L4, de toutes façons, j'ai pas trouvé de contre-exemple, donc je décide que c'est vrai… donc il est clair que chacun d'entre nous en tant que mathématicien, on se fiche éperduement de la conclusion L4. D'accord ?… Alors pourquoi la mettre ?… Et bien je prétends que c'est ça une des difficultés des mathématiques, c'est que *cette conjecture est vraie parce qu'elle n'a pas de contre exemple*,

Conclusion complète sur C4 (réponse et preuve)

et que on a l'air d'induire quelque chose de faux… ce n'est pas écrit, il n'empêche qu'on a l'impression qu'on l'écrit, hein… c'est-à-dire qu'on a l'air d'envisager les deux cas possibles.
Ce que vous avez dit là, c'est vrai au niveau du sens, on a l'impression que cette conjecture dit deux choses : ou bien L2 et L5, ou bien L2 et L4. Comme ceci est impossible, on dit mais pourquoi vous parlez de quelque chose d'impossible, puisqu'après coup vous n'en tenez pas compte ?

Intervention manifestant la connaissance de $\kappa\uparrow_{E-1}2$

Alors… *il faut que vous sachiez que quand vous mettez "ou", si l'un des deux trucs est vrai, le "ou" est vérifié*.

Institutionnalisation, introduite par un "appel" (il faut que vous sachiez) de $\kappa\uparrow_{E-1}3$.

Alors vous me dites, si le second ne se produit jamais, pourquoi en parler ? C'est ce qu'on appelle dans la vie de tous les jours parler pour ne rien dire. Donc dans la vie de tous les jours, quelqu'un qui vous rajoute des éventualités qui ne se produisent jamais, on lui dit, ben écoute, tu les retires tes évuentalités puisqu'elles ne se produisent pas. En mathématiques, éventuellement on les laisse, parce qu'elles ont des raisons d'être pour d'autres fonctions que celles qu'on vient de voir apparaître, et on est obligé de déclarer que c'est vrai, même si au niveau sémantique, on a l'impression qu'il y a un piège. On a l'impression qu'au niveau du sens,on est en train de nous dire que L2 entraînerait L4. Est-ce que vous comprenez ce qui est dit ici ?…

Explicitation de l'application de $\kappa\uparrow_{E-1}1$

Plus ou moins, hein… Alors… je suis pas forcé de vous persuader pour le moment, je dis : *si on applique notre règle du contre-exemple, on n'en trouve pas… si vous en trouvez un, vous nous le donnez, c'est ce que votre camarade vous a demandé, trouvez un contre-exemple et si vous en trouvez un, automatiquement on va être d'accord avec vous que c'est faux. Mais à partir du moment où vous ne trouvez pas de contre-exemple, et bien vous êtes obligés de déclarer que c'est vrai, c'est ce qu'on a fait, l'exhaustion, depuis le début.*

Résolution mathématique du conflit entre "logique" courante et "logique mathématique". La conclusion est maintenant complète, on peut penser que pour µ la proposition C4 a été traitée.

43 µ: Oui… vous vouliez intervenir…
44 ε9 : En général…Je voulais quand même faire remarquer que ça nous intéresse le fait que L4 soit impossible, parce que sachant L2… si L2 alors L5, c'est toujours possible, donc certain, le fait que L4 ne marche pas, ça nous arrange, *sinon le ou ne fonctionnerait pas*…

L'intervention de ε9 manifeste une erreur (correspondant à une connaissance que je n'ai pas identifée dans l'analyse a priori) qui ne fait aucun bruit pour µ.

45 µ: Oui… mais en gros, au niveau du sens, si vous vouliez garder quelque chose d'utile dans cette conjecture, qu'est-ce que vous feriez ?… Si après coup vous deviez garder ça comme un théorème, qu'est-ce que vous feriez ? Oui…

46 ε9 : Je dis… pour répondre à sa question, *ça dépend si le ou est inclusif ou exclusif… parce que s'il est exclusif, on peut avoir soit l'un soit l'autre, s'il est inclusif, on peut avoir l'un ou l'autre…*

ε9 revient avec une autre formulation sur ce que μ a déjà institutionnalisé dans l'intervention 44, μ ne le relèvera pas, ce qui confirme que pour lui la conclusion est maintenant complète.

47 μ: Oui… et donc… et alors pour vous… qu'est-ce que vous avez décidé ?
48 ε9 : (inaudible) c'est vrai… puisque (inaudible) donc…
49 μ: Donc pour vous, vous avez décidé, cette affaire là est réglée, c'est vrai… Bon !… Alors je voudrais dire, comme conclusion sur cette conjecture : elle est vraie à cause de notre règle qu'il n'y a pas de contre-exemple, simplement… si dans la suite de l'année, on s'aperçoit que on a des conclusions qui sont régies par un ou, mais qu'en fait une des conclusions ne se produit jamais… ben … on la rejettera, parce que ça ne fait que gêner le sens de cette conjecture, la seule chose qui est intéressante ici, c'est *si L2, alors L5,* le L4 il ne rend pas la conjecture fausse, mais il n'apporte pas de renseignement intéressant. Donc après coup, on remplacera C4 par C'4, qui sera : si L2 alors L5, et c'était même pas la peine de parler de L4, puisque c'est une éventualité qui peut pas (inaudible).

Nous avions identifié <si L2 alors L5> comme étant C4.2, une des conjectures issues normalement des règles de concomittances. μ termine donc cet épisode par un accord général sur une connaissance de niveau -2.

50 μ: Si on est d'accord là-dessus… on passe à la conjecture 6…
(arrêt enregistrement)

3.3. Conjecture C6 (intervention 51-131)

C6 : Si L1 ou L6 alors L2 ou L4

51 μ: Alors… quels sont ceux qui ne veulent pas prendre parti pour vrai ou faux sur cette conjecture n° 6… zéro… il semblerait que les problèmes soient réglés… quels sont ceux qui considèrent qu'elle est vraie… à peu près un tiers de l'amphi… alors il semble que les problèmes ne sont pas réglés… (rires)… quels sont ceux qui considèrent que c'est faux ?… oui, c'est bien 2/3 de l'amphi…

V	F	Autre
1/3 A	2/3 A	0

52 μ: Bien… je fais juste une petite… incidente vis à vis de ceux qui disent, qui ont dit tout à l'heure : quand est-ce qu'on commence le cours ?… *Je prétends que dans un cours normal, ces problèmes du "et" et du "ou", du vrai et du faux sont réglés en un quart d'heure par un professeur : il fait des tables de vérité, il vous dit comment ça se décide, et c'est fait depuis la classe de quatrième, et vous le savez depuis la classe de quatrième.* Le problème est que ce que vous savez n'est pas opérationnel, c'est-à-dire que… en gros, on n'est toujours pas d'accord sur des choses que… on devrait normalement être tous d'accord depuis la classe de quatrième, vous avez dit au début du débat l'autre jour, en maths, ici, on est tous d'accord sur les règles du vrai et du faux… c'est pas vrai ! C'est pas vrai pourquoi ? Parce que *entre une connaissance formelle sur le vrai et le faux, et une connaissance en acte, il y a deux choses différentes.* J'arrête là… Et maintenant à vous de dire pour et contre… Vous êtes dans quel camp ?… C'est faux ?… Alors, si c'est faux, vous devez avoir quelque chose à nous envoyer sur la figure. Pour quelle raison…

Cette introduction est analogue à l'intervention μ1: μ montre ici la dimension de construction (P2)

53 ε10 : J'ai un contre-exemple…
54 μ: Alors allez-y, donnez-nous un contre-exemple. Alors… *faites très attention, quand il y a quelqu'un qui fournit un contre-exemple, c'est le moment où il faut être le plus… attentif : est-ce que c'est vraiment un contre-exemple qu'il nous fournit, ou est-*

ce que c'est un hors-sujet, est-ce que c'est un exemple, c'est pas parce qu'il l'appelle un contre-exemple que c'en est un, hein, à vous de voir…

Discours de dévolution de la preuve de C6 (S-1↓)

55 ε10: S3T2
56 µ: Alors… S dans la position 3 et T dans la position 2…
57 ε10 : Les lampes L6 et L3…
58 µ: Alors, vous dites, dans ce cas là, les lampes L6 et L3 sont toutes les deux allumées, et puis…
59 ε10 : *et L2…*
60 µ: *Et en plus… C'est tout ! Ça vous suffit pour dire que c'est un contre-exemple…*
61 ε10 : *Non, non…* (inaudible)

µ empêche ε10 de développer son contre-exemple. Une preuve acceptée à ce point de la situation est contraire au projet de rejet de la logique courante (qui nécessite son expression).

62 µ: Alors… ça c'est l'hypothèse ?… *Alors vous dites : L6, ça vérifie l'hypothèse…et L3 vérifie pas la conclusion.*

µ continue à tranformer de façon erronnée ce que dit ε10, cf. remarque ci-dessus.

Bon… (brouhaha). Donc voilà l'explication qui est donnée : la conjecture 6 est fausse, parce que si vous mettez l'interrupteur S dans la position 3, l'interrupteur T dans la position 2, alors, ça allume la lampe 6… est-ce que tout le monde d'accord pour le moment avec ses prémices là, parce que si on n'est pas d'accord il faut le lui dire… *donc en mettant S en position 3 et T en position 2, ça allume la lampe n°6, et ça allume simultanément la lampe n°3… c'est un axiome de départ.*

Intervention d'évaluation de µ en ce qui concerne la situation S-2, cette intervention ne remet pas en cause la position P-1 (voir intervention µ9).

A partir de là, il dit : ben *ça vérifie l'hypothèse, ça vérifie pas la conclusion, donc c'est un contre-exemple.*

Cette intervention ne s'explique que si la notion de contre-exemple fait partie des connaissances précédemment institutionnalisée, en cours d'apprentissage. Il s'agit d'une connaissance d'ordre $\kappa{\downarrow}_{E0}$ qui n'a pas été identifiée dans l'analyse a priori (en effet, la place du protocole analysé dans la séquence des circuits n'est pas prévisible). On pourrait l'énoncer ainsi:

$\kappa{\downarrow}_{E0}$ *connaissances sur les preuves des assertions*

- $\kappa{\downarrow}_{E0}3$ *un contre-exemple est un exemple qui vérifie l'hypothèse mais pas la conclusion.*

Vous voulez réagir… Vous êtes dans quel camp?
63 ε11 : Faux !
64 µ: Faux… alors, vous êtes d'accord avec lui, *mais vous êtes pas d'accord avec son contre-exemple.*

Là encore µ intervient en brouillant l'argumentation, car ε11 peut être d'accord avec le contre-exemple, mais pas avec la preuve, ce qui n'aurait rien d'étonnant puisque ε10 lui même n'a pas pu s'exprimer à ce sujet.

65 ε11 : Le départ est juste, L6 vérifie l'hypothèse, L6 est allumée, mais *il faut dire que ni L2, ni L4 ne sont allumées…* et ça c'est un contre-exemple, parce que L3 ça n'a pas de rapport avec la conclusion.

ε11 intervient effectivement sur la preuve et non sur le contre-exemple.

66 μ: Donc vous dites… ça vous dites, ça n'a pas de rapport avec la conclusion, donc vous rajouteriez… vous diriez la même chose que lui, mais vous diriez à ce moment-là… ni L2, ni L4, donc c'est ça que vous appelleriez "ne vérifie pas la conclusion"… Donc votre argument… *Alors ni L2, ni L4 est-ce que tout le monde est d'accord à nouveau… que dans ce dispositif-là, les lampes L2 et L4 se trouvent en circuit ouvert, donc elles sont éteintes toutes les deux… ça va là-dessus ?* Alors maintenant… vous voulez intervenir, allez-y… vous vous taisez pour écouter ?

Intervention d'évaluation de μ en ce qui concerne la situation S-2.

67 ε12 : Pour revenir à ce qu'il dit là…
68 μ: Vous êtes dans quelle position ? (Heu…Rires)… Faux aussi … Alors vous voulez rajouter quoi ?
69 ε12 : Pour revenir à ce qu'il dit là, il dit si L1 ou L6 sont allumées, alors *ni L2 ou L4*… sont allumées quoi… mais on aurait pu dire si L1 ou L6 allumées, alors *L2 ou L4 éteintes…*

Cette intervention de ε12 montre l'incertitude des étudiants dans le traitement de la négation du ou, notamment à l'oral "ni L2 ou L4" signifie-t-il "ni (L2 ou L4)", "ni" a-t-il le même sens que "non", etc. Comme je l'ai annoncé dans l'analyse a priori, les étudiants n'ont pas les moyens (tables de vérité par exemple) de départager ces questions, ce qui devrait normalement conduire μ (éventuellement sous la pression des étudiants) à sortir de sa neutralité et à entrer dans un rôle didactique (P0↑) dans la situation vécue par les étudiants.

70 μ: Oui… Donc vous dites, on aurait pu formuler les choses différemment… Mais pour le moment, est-ce que ça remet en cause ce qui vient d'être dit, à savoir, si jamais S est en position 3 et T en position 2, alors je vois s'éclairer la lampe 6, L6, et je suis certain que L2 et L4 sont éteintes, c'est ce qu'il nous dit comme argument, est-ce que ça, ça vous satisfait comme explication pour dire que c'est faux… Oui ?… Vous, vous êtes dans quelle position ?… Faux… C'est toujours le camp du faux qui parle pour le moment, *j'aimerais bien que le camp des vrais parle aussi…*

μ intervient ici suivant sa conviction ($\kappa{\downarrow}_{P3}2$) que les assertions et les preuves fausses doivent s'exprimer pour pouvoir être rejetées.

71 *ε10* : (inaudible)… avec ce qu'il a dit, mais je pense que ce n'est pas suffisant… parce que…*il faut deux contre-exemples*… pour montrer que… *ça ne va pas pour L6, mais que ça ne va pas également pour L1…*

L'incertitude sur la négation de C6 conduit ε10 lui même à douter de son argumentation.

72 μ: Ah !… Alors attendez… vos camarades là haut ne vous écoutent pas, et à mon avis ils auront des ennuis parce qu'il est en train de nous suggérer… vous avez entendu ce qu'il suggère ? Non !… vous ne risquiez pas, vu ce que vous étiez en train de faire… Alors allez-y, vous répétez votre explication.
73 ε10 : Quand … on fait… on voit très bien que quand on fait marcher L6, L2 et L4 ne marchent pas, ça vérifient pour L6, mais il faut également montrer que quand L1 marche, L2 et L4 (inaudible)
(Brouhaha)
74 μ: Donc… vous dites pour le moment, on a regardé ce qui se passe avec L6…
75 ε10 : (faible) Ah ! Non, non, non… ça va…
76 μ: … c'est… ça va ? Parce que vous avez dit : *il faudrait deux contre-exemples*… Non ?… *Il n'y a plus besoin de deux contre-exemples maintenant ? Bon ! Parce que ce serait une nouvelle règle, hein !…* ?… Vous, vous êtes dans quel camp ? … Faux !…

μ sort ici de la neutralité pour intervenir en position didactique vis-à-vis d'une connaissance ($\kappa{\uparrow}_{E0}1$ dans mon analyse) qu'il estime institutionnalisée. On voit ici que ces connaissances fraîchement institutionnalisées jouent un rôle particulier dans les interventions de μ, rôle que mon analyse a priori n'a pas su anticiper.

77 ε12 : Le sens de la phrase, c'est : Si l'une des lampes L1 ou L6 sont allumées alors l'une des lampes L2 est allumée ou L4 est allumée…
78 μ: Alors au niveau du sens, vous dites, si l'une des deux lampes L1 ou L6 est allumée, il faut que l'une des deux L2 ou L4 le soit…
79 ε12 : Là on a un cas où L6 est allumée, et aucune des deux de L2 ou L4 n'est allumée.
80 μ: Alors… vous trouvez un cas où L6 est allumée, c'est la position S3 et T2, et cependant *aucune des deux conclusions ne se trouve être vraie*, donc vous dites, ça, ça me fait un contre-exemple …

De nouveau μ fausse le débat, en utilisant le mot-clé "conclusion" pour désigner en réalité des événements intervenants dans la conclusion. Est-ce que la manière de l'expliquer serait une connaissance de μ sur les erreurs typiques dans la preuve de C6, μ intervenant (plus ou moins consciemment) pour provoquer ces erreurs.

81 μ: Oui… vous êtes dans quel camp ?
82 ε13 : Vrai…
83 μ: Vrai. Alors… ça c'est intéressant parce que jusqu'à présent, c'était tous des gens qui allaient dans le sens (inaudible).
84 ε13 : Ouais, ben moi je pense que… j'suis pas du tout d'accord avec ce qu'il a dit : si L1 est allumée ou L6 est allumée, alors L2 est allumée ou L4 est allumée. Moi je prends (inaudible) je prends… si L1 allumée…
85 μ: Oui… *Alors pour allumer L1, vous avez pas le choix, hein, ça vous oblige à mettre S dans la position 1 et puis T en position 2…*

Intervention d'évaluation de μ en ce qui concerne la situation S-2.

86 ε13 : Voilà…
87 μ: … et à ce moment-là, qu'est-ce qui se passe ?
88 ε13 : Alors… donc S dans la position 1… alors je regarde, je vois … L4 est allumée…
89 μ: Alors ça, ça entraîne que L4 est allumée…
90 ε13 : *…ben déjà, j'en ai une des deux de la fin qui marche, donc pour moi, ça marche, y'a pas de problème…*

L'erreur de ε13 peut s'interpréter de différentes façons: mauvaise interprétation du terme "conclusion" dans la définition d'un contre-exemple ($\kappa\downarrow_{E0}3$), ce qui a été favorisé par 80μ, ou difficulté de distribution du "ou" dans une assertion complexe ($\kappa\uparrow_{E\text{-}1}5$ et 6).

91 μ: Oui… Donc vous voyez ce changement de point de vue, qui est de dire : je regarde… *j'ai deux hypothèses* : l'hypothèse L1, l'hypothèse L6.

cf 80μ

Bon, quelqu'un nous a regardé que l'hypothèse qui marchait pas bien, c'est tout le temps des gens qui ont dit que c'était faux, ils ont regardé ce qui ne marchait pas, et du coup, ils nous ont fait capoter notre conjecture. Vous, vous êtes plutôt positive, et vous dites : moi je regarde L1, et si je regarde L1, je m'aperçois que la conclusion L4 est vérifiée, et à ce moment-là, je dis ça marche. Donc c'est pas la même façon de regarder les choses.
92 μ: Il y a plusieurs personnes qui veulent intervenir… là haut… allez-y.
93 ε14 : Je voudrais lui demander… c'est par rapport à ce que tu as dit… est-ce que tu penses que le contre-exemple en est un ou pas ?
94 ε13 : *Le contre-exemple, c'en est un*… oui, je crois bien… mais si tu veux, ça marcherait, ça pourrait démonter la proposition *à partir du moment où tu aurais : si L6*

alors L2 ou L4. Si tu avais qu'une partie… que cette phrase là… ça serait un contre-exemple valable, mais (inaudible)
(Brouhaha)

On remarque qu'ici, contrairement au traitement de C4, μ n'écrit pas la nouvelle assertion proposée: si L6 alors L2 ou L4. Il s'agit d'une certaine rupture de contrat par rapport au débat scientifique, alors que ce contrat est justement en jeu dans la situation didactique pour P0↓. Il est possible que μ ait peur de se laisser entraîner vers l'institutionnalisation de connaissances sur la distribution des assertions complexes, ce qui n'est pas dans son projet (connaissances de logique trop spécialisées).

95 μ: Alors… vous dites, en gros… vous dites, OK, si là, si la conjecture c'était si L6 alors L2 ou L4, là, impeccable, vous êtes d'accord, c'est faux. Mais à partir du moment où vous avez deux possibilités au niveau des hypothèses, et bien je prends celle qui m'arrange, s'il y en a une des deux qui m'arrange, et à ce moment-là, ça marche.… Allez-y…
96 ε15 : … non, mais là, ce qui va pas, c'est que… *les deux hypothèses… on doit prendre les deux hypothèses. Les deux conclusions doivent partir des deux hypothèses.*

ε15 ne peut intervenir qu'en reprenant le vocabulaire de μ: deux hypothèses, deux conclusions, ce qui va singulièrement affaiblir sa position, puisqu'il ne peut plus s'appuyer sur aucune connaissance stable sur la notion de contre-exemple.

97 μ: Les deux conclusions doivent fonctionner avec les deux hypothèses. Bon ! alors en fait, vous êtes en train…
98 ε15 : Là, ça marche que dans une…
99 μ: Ça marche que dans une, mais pas dans l'autre. Allez-y…
100 ε : (inaudible)
101 μ: Chtt… Juste une seconde. J'insiste pour dire : regardez à quel point, un truc comme ça… qui… *si je vous donnais la règle du "ou", d'ailleurs vous la connaissez tous la règle du "ou"…Vous connaissez la règle de vérité des conjectures, vous connaissez la règle du "ou", normalement, on est tous d'accord.*

Fiction assumée (cf. μ1).

En fait on n'est pas tous d'accord. Pourquoi, *parce qu'il y a des niveaux de sens différents dans notre façon de juger du vrai et du faux.* C'est là-dessus qu'on essaie de se mettre d'accord. Je vous redonne la parole… J'insiste pour dire que… c'est normal qu'on soit pas d'accord, parce qu'on ne juge pas les choses au même niveau.

Dans l'intervention 101, μ donne des indications sur son interprétation de la situation didactique, qui pourrait avoir une influence sur les interventions des étudiants. Il rejete en effet la situation d'aprentissage de notions de logique, dans laquelle se place naturellement les étudiants, pour évoquer le conflit entre deux "façons de juger", qui entre ($\kappa\downarrow_{P3}5$) dans l'idée de base de la séquence. La tension "vers le haut" (niveaux sur-didactiques) ainsi crée ne va pas nécessairement être acceptée par les étudiants. En fait la position de μ devrait être difficilement tenable car C6 n'a pas d'interprétation dans la logique "courante" (contrairement à C4, comme nous l'avons vu dans l'analyse a priori). Les difficultés des étudiants ne peuvent pas ici s'interpréter dans un conflit logique courante/logique mathématique, mais comme des difficultés internes à la logique mathématique, très mal connue en première année de DEUG, ce qui explique d'ailleurs l'incertitude importante sur la valeur de vérité de C6.

102 ε16 : (inaudible) j'étais dans faux, mais maintenant…enfin, je vais me mettre dans autre, parce que… *il semblerait que dans C6, le mot "ou" n'a pas le même sens dans l'hypothèse que dans la conclusion…*

ε16 exprime ici *en langage naturel* la difficulté inhérente à la distribution du “ou” dans les implications (voir $\kappa\uparrow_{E-1}$5 et 6): il est vrai que “ou” ne se distribue pas pareil suivant qu'il se trouve dans l'hypothèse ou dans la conclusion.

donc… le problème c'est, enfin la question que je pose, c'est : *est-ce qu'on a le droit de changer le sens du "ou" entre l'hypothèse et la conclusion ? Moi je pense qu'on aurait peut-être pas le droit !*

La question posée ici est presque “tragique”: s'il y a effectivement un changement de sens, alors la fiabilité des raisonnements mathématiques s'en trouve singulièremenent diminué. μ est donc ici interpelé par les étudiants au sujet d'une difficulté cruciale.

(Brouhaha)

103 μ: Alors… (écrit) *Le sens du "ou" n'est pas le même dans l'hypothèse et dans la conclusion… Vous repérez… Je pense que c'est… c'est absolument capital ce qui vient d'être dit ici… j'interviens dans le débat là, pour vous dire: ça, notez-le ! Notez-le parce que… c'est quelque chose de très important.*

On assiste ici à une découverte de μ, qui n'a sans doute jamais pensé à exprimer cette propriété logique dans une formule simple en langage naturel. Le projet de μ n'étant d'ailleurs pas centré sur l'apprentissage de la logique, on peut d'ailleurs penser qu'il n'a même pas vraiment en tête les propriétés sous-jacentes. D'autre part μ peut maintenant poursuivre un projet d'opposition, non pas entre logique courante et logique mathématique, mais entre expression en langage naturel et expression “algébrisée” ou “formalisée” (ce qu'il a déjà dévalorisé précédemment en 36μ). Mais si cela va lui permettre de maintenir son projet, comment va-t-il résoudre l'angoisse des étudiants face à une contradiction forte dans le raisonnement mathématique?

On a l'impression… de voir qu'on a un traitement différent du "ou" selon qu'on est au niveau des hypothèses ou au niveau des conclusions. Au niveau des hypothèses : certains d'entre nous disent, ah mais le "ou", ben, il faut que vous le traitiez un peu comme un "et", c'est-à-dire il faut que vous regardiez les deux cas de figure… d'autres nous disent, non, non, moi le "ou", l'hypothèse, je prends celui des deux qui m'intéresse, et puis je le garde… Et au niveau de la conclusion… on dit maintenant : pour que la conclusion soit vraie, il suffit qu'une des deux conclusions soit vraie. Donc là, on regarde le "ou"… de façon… en disant ben s'il y a un des deux qui marche, ça me suffit pour la conclusion. Donc *vous voyez qu'il y a une sorte de traitement différent, c'est que dans l'hypothèse, le "ou" se fait traiter comme un "et" par certains, et le "ou" se fait vraiment traiter comme un "ou" au niveau de la conclusion.*

μ intervient-t-il ici en évaluant positivement le raisonnement? Seul le temps utilisé (“il y a” et non pas “il y aurait”) pourrait donner une indication, mais elle est faible. Ceci confirme ici que pour μ la conclusion sur les valeurs de vérité des conjectures fait partie de la situation a-didactique, et non pas de la situation didactique (comme dans l'interprétation “ascendante”), s'il évalue sur ces questions, ce sera non conforme à son projet.

Et l'un d'entre vous nous dit : "Ben si alors, le "ou" change de sens suivant qu'il est dans l'hypothèse ou dans la conclusion, j'ai la tête qui devient énorme, et je me mets dans autre". Hein, d'accord… c'est un peu ce qui vient de nous être dit.… Alors, à vous…

On peut penser que pour les étudiants le doute subsiste à la suite de cette intervention: le double sens du “ou” est-il correct, et si oui comment l’accepter sans renoncer à la cohérence du raisonnement?

> 104 ε12 : Non, c'était pour donner une métaphore : en fait, c'est un peu comme… si on promettait à un petit à l'école, on lui dit "Si tu as 15 ou 16 en maths à ton interro, tu auras soit une glace soit du chocolat". S'il a soit 15, soit 16 et qu'on lui donne ni une glace, ni du chocolat, *on lui aura menti…* c'est le cas des lampes…

Pour que la métaphore de ε12 soit utilisable, il faut interpréter le “mensonge” comme “faux”.

> 105 μ: Oui…
> (Rires)
> 106 ε12 : Il aura bien L6, qui est allumée, mais il n'y a ni L2, ni L4… donc en fait il a une des deux notes, mais il aura eu ni sa glace, ni du chocolat … et on lui a menti… il a l'hypothèse mais pas la conclusion.
> (Rires, brouhaha)
> 107 μ: Alors… est-ce que… vous entendez la métaphore qui vous est proposée? On remplace les lampes éclairées d'un côté par le fait d'avoir 15 ou 16, on dit si tu as 15 ou 16, tu auras ou de la glace ou du chocolat. Le gars, il a 15… il a rien ! (Rires)… Si c'était vous, est-ce que vous êtes d'accord ?
> (Brouhaha, rires, Ah ben non…)
> 108 μ: C'est une métaphore pour vous faire comprendre le changement de sens entre les deux… Vous voulez intervenir…
> 109 ε : Moi, personnellement, c'était pour dire que (inaudible, brouhaha)
> 110 μ: … Juste une minute : j'insiste simplement, juste après, je vous redonne la parole. *Ce rôle de la métaphore, c'est quelque chose de très important pour comprendre des choses abstraites comme les mathématiques, c'est-à-dire que… vous avez intérêt à vous fabriquer des métaphores à chaque fois que vous avez du mal à comprendre quelque chose…*

μ prend ici le temps d’une intervention plus globale concernant un projet qui transcende la séquence particulière des circuits, et qu’on pourrait identifier comme le “projet de donner des méthodes de recherches de solutions mathématiques”, dans lequel l’importance de la construction de métaphore pourra être identifiée comme une connaissance (à caractériser dans S3).

> il faut voir que les métaphores ça a une limite, souvent ça n'explique bien les choses que pour celui qui les fabrique, c'est souvent pas très clair pour les autres, donc ça, il faut savoir qu'il y a une limite aux métaphores. Mais de s'en fabriquer pour soi, c'est très important pour s'obliger à dire : est-ce que j'ai bien compris ce que je suis en train de raconter. Donc peut-être que pour celui qui l'a dite, cette métaphore, elle est claire comme de l'eau de roche, pour d'autres, c'est peut-être pas évident…
> (Changement de bande)
> 111 μ: … et *vous voyez qu'à chaque fois qu'on a des désaccords entre nous, c'est toujours parce que il y a un changement de niveau…*

μ rentre ici dans la conclusion de la situation didactique telle qu’il l’envisage (P↓0), il prend donc position sur son interprétation des difficultés rencontrées (interprétation qu’il doit imposer en ce qui concerne C6).

> tout à l'heure vous avez vu deux interprétations possibles à la conjecture précédente, ici on nous dit : *cette conjecture, on peut la scinder en deux conjectures, la conjecture C'6 qui prend une hypothèse et les deux conclusions, la conjecture C"6 et les deux conclusions*,

μ intervient ici sur le fond du débat qui agite l’amphi: comment décomposer C6, et il nomme ici deux conjectures, ce qu’il avait omis de faire en 95μ. La décomposition qu’il obtient est la plus “choquante” du point de vue de la distribution, puisqu’elle demande le passage du “ou” au “et” (C6 <=> C’6 *et* C”6). μ s’engage ainsi sur le terrain des connaissances de décomposition des assertions complexes, qui ne rentre pas dans son projet.

> et maintenant, dans son traitement, il dit : et bien si une des deux conjectures est vraie, je dis que l'ensemble est vrai, et puis d'autres sont en train de dire : si une des deux conjectures est fausse, alors je dis que la conjecture globale est fausse. Vous vouliez réintervenir… oui…
>
> 112 ε17 : (inaudible) *là il différencie le sens du "ou" entre hypothèse et conclusion …*

Cette intervention montre que l’intervention μ103 n’a pas été reçue par tous comme une évaluation positive de la différence du “ou” entre hypothèse et conclusion.

> 113 μ: … donc vous êtes pas d'accord avec cette interprétation… et vous, vous êtes dans quel cas ?
>
> 114 ε18 : Il y a quatre cas possibles : soit on a L1, L2, soit on a L1, L4, soit on a L6,L2, soit L6,L4. Pour L6, il peut y avoir que deux cas possibles : soit L6,L2 ou L6,L4, or on a trouvé *un cas différent* de L6,L2 et L6,L4…

ε18 propose ici une solution qui permet de ne pas distribuer C6 (conforme à une tactique repérée comme $\kappa\uparrow_{E\text{-}1}7$, par exemple) et de revenir à l’exhaustion des cas possibles (possibilité institutionnalisée précédemment). Mais ε18 ne prononce pas le mot de contre-exemple, ce qui fait que son intervention reste ambigue.

> 115 μ: Donc vous, vous avez trouvé *un contre-exemple*,

μ semble accepter ici un “contre-exemple” qui n’est pas explicité (par une position des commutateurs); il va tout d’abord produire un discours qui aborde la conclusion de la situation didactique pour lui (S↓0).

> et ça vous persuade que c'est faux.… Alors, peut-être que… on va arrêter juste un instant, qu'il n'y ait pas de *faux débat* entre nous…

Le “faux débat” est-il un autre indice du fait que pour μ la conclusion concernant C6 a déjà été formulée, et que ce débat est clos? Le discours qui suit tend à le confirmer.

> Je vous ai dit : vous connaissez tous le sens du "ou" en mathématiques. Alors je le reprécise, de façon à ce qu'il n'y ait pas de… (lit) Le "ou" du mathématicien, qui est le même que le "ou" des automates et le même que le "ou" de l'informatique, hein, il n'y a pas de problème vis à vis de ça, n'est pas le même que le "ou" de l'épicier ou du restaurateur… hein, vous connaissez tous des menus de restaurant qui sont fabriqués avec des "ou", mais si vous entendez le "ou" du restaurateur comme un mathématicien, et bien vous allez devoir payer des suppléments à la sortie, c'est-à-dire que *le "ou" du restaurateur est un "ou" exclusif* : s'il vous dit escalope ou poisson, vous aurez pas les deux, ou vous payez un supplément. *Le matheux dit : pour que le "ou" soit vrai, il suffit que l'un soit vrai, que l'autre soit vrai, exclusivement, ou que les deux soient vrais en même temps.* Donc le seul cas pour que le "ou" soit faux, c'est qu'il y en ait deux qui soient faux. *D'accord… pour que le "ou" soit faux, pour que "A ou B" soit faux, il faux que vous ayez simultanément A faux et B faux.* Donc ça… le choix du mathématicien - on aurait pu faire un autre choix - mais c'est celui que vous avez sur vos calculettes, toutes vos calculettes sont basées sur ce "ou" là, c'est le "ou" de l'informatique, tous les automates sont basés là-dessus aussi, puisqu'il y a tout le temps des "et" et des "ou" dans les automates… là dedans… pour une fois on est cohérent dans tout le monde scientifique vis à vis d'un choix arbitraire. *Mais on n'est pas cohérent avec le choix de la vie de tous les jours, où le "ou" de la vie de tous les jours est la plupart du temps exclusif. D'accord… Donc il y a bien un problème entre le "ou" de la vie de tous les jours et le "ou" du mathématicien qui dit : c'est soit l'un, soit l'autre, soit les deux. Et donc, si les deux sont faux, alors le "ou" devient faux. Donc là,*

maintenant, il n'y a plus d'ambiguïté là-dessus, c'est une convention, on aurait pu en choisir une autre, mais on adhère à cette convention. Ça marche ?…

L'interprétation de µ est maintenant claire: les difficultés relatives à C6 seraient dûes à une résistance à accepter "ou" comme étant inclusif (que je noterais ici *), ce qui ne me semble pas tenable. En effet, si l'on examine la proposition <<L1*L6> => <L2*L4>>, il s'agit de savoir si cette interprétation de C6 (que nous appellerons K6) pourrait permettre de soutenir la réponse "Vraie" pour cette nouvelle assertion. Il faut examiner les cas où <L1*L6> est vrai, ce qui correspond exactement aux mêmes cas que pour <L1 ou L6> car L1 et L6 ne s'allument jamais en même temps. La négation de <L2*L4> produit les cas (L2, L4), (nonL2, nonL4) (c'est-à-dire un cas de plus que pour <L2 ou L4>), et donc le même contre-exemple que précédement fonctionne[11].

L'attitude ambigue de µ dans le traitement de C6 pourrait donc être dûe à une mauvaise analyse a priori de µ des difficultés des étudiants vis-à-vis de C6, difficultés dont la résolution ferait sortir µ de son projet.

> 116 µ: Alors si ça marche, on revient à notre conjecture : est-ce qu'on reconnaît comme un contre-exemple ce qui nous est proposé ici, est-ce qu'on ne le reconnaît pas comme un contre-exemple? A savoir, si S est dans la position 3 et T dans la position 2, alors il se trouve que la lampe L6 et allumée et que ni la lampe 2 ni la lampe 4 n'est allumée.… Ça va, je peux retirer mon transparent ?…
> 117 µ: Alors, maintenant, si on a notre règle du "ou"… c'est pas la peine de vous mettre à … vous aurez un résumé de tout ça… c'est vraiment au niveau du sens qu'il faut que les choses se produisent. Je remets le circuit de la conjecture… *Est-ce que maintenant, avec le "ou" qu'on a, la règle du "ou" qu'on vient de se donner, est-ce que l'hypothèse est vérifiée ?…*

µ produit ici une sorte de "maïeutique solitaire" qui servira de conclusion pour la situation didactique "élargie" (conclusion sur C6 et sur le "ou" mathématique dont on vient de voir qu'il est dans le projet de µ).

> Pour vérifier l'hypothèse, d'après ce qu'on vient de dire, escalope ou poisson on peut avoir les deux, mais pour que ça marche, il suffit que l'une des deux soit vraie. Donc quelqu'un qui choisit d'allumer la lampe 6 allume bien L1 ou L6 : L1 ou L6 se trouve être vraie dès que la lampe 6 est allumée, donc là, on est obligé de reconnaître que l'hypothèse est vérifiée.

Dans son traitement de C6, µ manifeste la connaissance "tactique" que j'ai identifiée comme $\kappa\uparrow_{E-1}7$, mais sans la mettre en évidence.

> Si quelqu'un n'est pas d'accord, il le dit… Donc… non L2 et non L4, on a vu que c'était une nécessité du circuit, hein… vous allumez L6 dans cette situation là… si vous vous mettez dans cette situation là, vous avez L6 qui se produit, et simultanément non L2 et non L4… Ça, non L2 et non L4, qu'est-ce que ça dit par rapport à notre conclusion ? … La conclusion, c'était L2 ou L4 : pour que ce soit vrai, il faudrait que j'ai L2 allumée, ou L4 allumée, ou les deux ensemble. Or là, on affirme que ni l'une ni l'autre est allumée, donc c'est le seul cas où le ou se trouve être en

[11]Le cas dans lequel le "ou" mathématique s'oppose au "ou" courant est donc celui où les deux événements sont vrais tout les deux. C'est exactement le cas de la conjecture C7, qui pourrait être considérée comme fausse dans une interprétation du ou "courant", ce qui jette une autre lumière sur l'articulation C6-C7 (voir plus loin).

défaut, d'accord ? … C'est le cas où le "ou" se trouve être certainement faux, d'accord ?… Donc ça, c'est …non-conclusion…

118 μ: A partir du moment où on reconnaît que ce cas particulier vérifie l'hypothèse, ne vérifie pas la conclusion, si on ne veut pas tout le temps revenir en arrière sur la décision qu'on a prise vendredi dernier, on est obligé de dire que cette conjecture est fausse… Ce qui ne retire rien aux affirmations qui ont été faites, à savoir le ou dans cette conjecture n'est pas traité de la même façon au niveau de l'hypothèse qu'au niveau de la conclusion… au niveau du sens… au niveau des règles logiques, on a appliqué implacablement les règles logiques, mais au niveau du sens, c'est ce qu'il faut que vous compreniez, c'est ce qui est vache en mathématiques… dès que vous mettez une hypothèse, les gens ont le droit de choisir dans vos hypothèses, si vous avez plusieurs possibilités, ils choisissent… pour que ça marche, il faut que ça marche toujours le truc du matheux, donc on va choisir ce qui coûte le moins cher, puisque en général c'est ce qui nous arrange, et puis à ce moment-là, si la conjecture est vraie, on doit avoir ce qui est affirmé dans la conclusion, d'accord ?… Donc, vous, vous dites, moi je suis plutôt … j'ai envie de regarder…il y a un cas où ça marche, j'ai envie de dire que c'est vrai, et bien, c'est contraire à l'épistémologie du matheux. *Pour que quelque chose du matheux marche, il faut que quelle que soit la façon dont vous prenez l'hypothèse, vous récupériez la conclusion. S'il y a une certaine façon de s'adapter à l'hypothèse, telle que la conclusion capote… c'est précisément le danger de mort, c'est toujours l'histoire : quelqu'un va se servir de ce théorème pour construire une centrale atomique, comme par hasard, il va se mettre dans le mauvais cas de l'hypothèse, et comme par hasard ça va lui p… dans la g… D'accord ?… Donc c'est pour cette raison-là qu'on est obligés de dire : si vous mettez une hypothèse en ou, et bien il faut que ça marche pour tous vos ou. Il faut que vous regardiez chacun des cas possibles que vous avez mis, si à chaque fois ça marche (inaudible), mais s'il y a un des cas possibles qui amène un pépin (inaudible). Vous voyez à quel point c'est difficile de mélanger la logique et le sens. Oui*…

μ reprend à la fin de la conclusion une connaissance de niveau 1 (dans l'analyse ascendante) à laquelle il aimerait amener les étudiants: les raisons du traitement dichotomique en mathématique ($\kappa\uparrow_{E\text{-}1}1$). Pour μ, la conclusion de C6 est maintenant complète.

119 ε11 : *Pour que ce soit plus facile, on pourrait passer par non C6 encore une fois.*

ε11 cherche ici à relancer le débat sur le terrain de la validation des preuves des assertions, qui est celui que j'ai identifié comme la situation didactique dans l'analyse ascendante. Il cherche à obliger μ non seulement à conclure sur la valeur de vérité de C6 mais aussi sur les preuves de celle-ci.

120 μ: Alors… on va y venir, et donc vous dites pour le moment, il y aurait une façon de s'y prendre, ce serait de passer par la négation de… peut-être qu'on y verrait plus clair. Alors *il va falloir qu'on se donne effectivement cet outil de la négation, peut-être que ça clarifiera certaines choses*.

Il n'est pas dans le projet de μ de s'engager sur ce terrain dans cette situation, et il va donc repousser le débat.

Ça ne retirera rien au niveau du sens, hein… Tant que le choc qui a été produit ici, à savoir j'ai plusieurs hypothèses, j'ai envie de ne garder que celle qui m'arrange, tant que vous restez dans cette perspective là, vous aurez des pépins ensuite. Quand vous avez plusieurs hypothèses possibles, ben il faut regarder si à chaque fois l'hypothèse est suffisante, s'il y en a une d'entre elle qui ne marche pas… (inaudible)… Pardon ?… J'ai pas entendu…

121 ε19 : *J'ai pas compris la différence des "ou"…*

Pour les étudiants, il y a une ambiguité sur ce qui a été institutionnalisé: doit-on retenir la différence des “ou”?

> 122 µ: La différence des "ou"… et bien, c'est qu'au niveau de l'hypothèse, vous êtes obligé de regarder les deux cas : vous êtes obligé de vous assurer que, si c'est le premier cas, ça marche, si c'est le deuxième cas, ça marche. Alors qu'au niveau des conclusions, pour que ça marche, il suffit qu'il y en ait un des deux qui marche, mais on ne regarde pas les deux. C'est pour ça qu'il y a un changement de traitement, voyez… c'est pas la même façon de traiter les choses au niveau de l'hypothèse qu'au niveau de la conclusion. Donc il a raison de dire, de nous signaler : attention, danger. *Mais on a une règle - un contre-exemple suffit - qui nous permet de contourner ce danger.*

La règle du contre-exemple ne suffit pourtant en rien, dans la mesure où on ne sait pas l’interpréter dans le cas où il y a plusieurs hypothèses et plusieurs conclusion, ce qui était au coeur du débat dans les interventions 71 à 99.

> Mais cette règle… elle est… elle existe, mais on n'a pas très envie de l'appliquer ici. Ça marche ça …
> 123 ε20 : Vous avez dit que…
> 124 µ: Comment ?…
> 125 ε20 : *Vous avez dit que le "ou" mathématique était toujours inclusif…*
> 126 µ: Non… il est pas… Inclusif, ça veut dire que c'est soit l'un, soit l'autre, soit les deux, d'accord…
> 127 ε20 : *Et là dans l'hypothèse, vous prenez le "ou" exclusif…*

ε20 cherche à interpréter l’insistance de µ (int 115) pour régler l’incertitude créée précedemment (voir intervention 102 qui ouvre la question des deux “ou”). Il cherche une interprétation de la réponse dans l’analogie des deux “ou” (inclusif/exclusif; hypothèse/conclusion).

> 128 µ: Pour dire que ça vérifie l'hypothèse, il faut que ça marche…que l'hypothèse marche. Donc ça marche si les deux hypothèses sont vérifiées en même temps, si l'une des deux hypothèses est vérifiée ou si l'autre hypothèse est vérifiée. Un contre-exemple, c'est quelque chose qui vérifie l'hypothèse. Or on nous a donné un cas particulier dans lequel un des deux membres du "ou" était vrai d'accord ? L6, c'est un des deux membres du ou, donc l'hypothèse est vérifiée… Mais que ce soit choquant, je suis d'accord avec vous, hein, le but c'est…
> 129 ε? : *Moi j'ai pris non C6, et j'ai trouvé un contre-exemple, donc C6 est vraie…*

Le débat repart une nouvelle fois vers un domaine pratiquement impossible à aborder (la négation de C6 est particulièrement délicate!).

> 130 µ: Bon ! Mais probablement que sur votre non C6, on va avoir des discussions, donc c'est pour ça qu'il faudra qu'on revienne sur le non, d'accord…
> 131 µ: *Pour être sûr qu'on est complètement d'accord sur le ou, je vous donne… 30 secondes, la conjecture suivante. Normalement, ça ne devrait poser aucun problème.*

Cette transition montre le rôle de C7 pour µ. Nous avons vu que C7 romp avec la “progressivité” (C3, vu avant le début du protocole) C4-C6, le travail trivial de cette conjecture est souhaité par µ pour refermer la situation.

3.4. Conjecture C7 (interventions 132-139)

C7 : Si L6 alors non L1 ou non L2

> 132 µ: C'est bon… on peut voir où vous en êtes… Quels sont ceux qui sont dans autre ? Zéro… Ça c'est quelque chose qui pour le moment a l'air d'être réglé…

(inaudible) Quels sont ceux qui considèrent qu'elle est vraie ? Presque tous ? Quels sont ceux qui considèrent qu'elle est fausse ? Zéro… (rires)…

V	F	Autre
presque tous	0	0

133 µ: Bien… alors, il n'y a rien qui vous gêne dans cette conjecture?

134 ε1 : Non, mais le "ou", là… ce serait un "et", ça serait exactement la même chose, il a aucune influence là…

135 µ: Bon ! Si c'était un "et", ce serait mieux…

136 ε1 : Non, ça serait pareil…

137 µ: Si c'était un "et", ce serait vrai aussi…

138 ε1 : …de toute façon un "et" ou un "ou", ça change pas…

139 µ: Donc… il me semble qu'on a gagné un étage par rapport à avant… on se rend compte qu'*au niveau du sens, si on voulait donner le maximum de renseignements, on mettrait "et"… puisqu'on donne plus de renseignements…* puisque c'est vrai, hein… simultanément, si jamais vous allumez la lampe 6, alors automatiquement, et la lampe 1 est éteinte et la lampe 2 est aussi éteinte. Donc, si vous deviez donner le maximum de renseignements, vous mettriez un "et" … donc là, vous avez donné moins de renseignements en mettant un "ou", d'accord ?… Bon ! mais c'est pas faux. Donc là, c'est déjà un gain si on se rend compte qu'*une conjecture qui est moins bonne que celle qu'on voudrait donner n'est pas pour autant fausse. Elle est moins intéressante que celle qu'on aurait pu mettre en remplaçant le "ou" par un "et".* Donc ça, maintenant, c'est gagné.

Comme µ l'a annoncé (int 131), il cherche maintenant un consensus. Du point de vue de la situation S-2, la proposition évoquée comme possible (Si L6 alors non-L1 *et* non L2) est plus naturelle, puisque le “et” est plus proche des concomittances. µ accepte la fiction de “quelque chose de gagné” pour un réflexe dans la logique courante, réalisant ainsi une version d'effet “Jourdain” qui met tout le monde apparemment d'accord après le difficile débat qui a précédé.

3.5. Synthèse finale (interventions 140-152: fin du protocole)[12]

Dans ce long discours final, appuyé par la rétroprojection de transparent, µ reprend les points qu'il souhaite renforcer. Cette intervention se situe au niveau de la situation didactique (S0↑) envisagée. On peut remarquer dans cette intervention l'absence de référence aux connaissances logiques en jeu dans la situation (ce qui aurait été le cas si ces connaissances étaient effectivement visées par la situation).

Les points évoqués sont relatifs essentiellement à la nature du travail mathématique. Certains points ont été directement rencontrés dans le protocole présent (un contre-exemple suffit, distinction entre exemples, contre-exemples, hors-sujets, les mathématiques ont vocation d'universalité). µ réfère très peu aux situations directement vécues par les étudiants dans les situations préfédentes.

Conclusion

L'analyse fine des connaissances structurées me semble révéler de très riches possibilités d'interprétations desdécisions du maître et des interventions des élèves.

[12]Cette partie du protocole se trouve en annexe 4.

Dans cette conclusion, je ne mettrais en avant qu'un seul point parmi ceux qui pourraient être étudiés à partir de l'analyse présentée: celui des difficultés de l'enseignant dans l'interprétation de ses observations.

En effet, s'il est bien connu, dans le cadre des recherches expérimentales, que l'analyse préalable est nécessaire pour la prise d'informations pertinentes par le chercheur, cette dimension a rarement été mise en avant dans le cas de l'enseignant. Dans le protocole (interventions 22, 36, 80 notamment), on peut repérer des interventions de l'enseignant qui révèlent une interprétation erronnée, au sujet de connaissances qui ne font pas partie du projet de l'enseignant.

Dans le protocole étudié, on peut noter que l'analyse préalable apparement connue de l'enseignant est pourtant bien plus sophistiquée que celle que l'on peut attendre la plupart du temps. Cet effet "d'aveuglement" me semble donc à étudier de plus près dans un cadre plus large.

Annexe 1
Schéma de structuration du milieu[13]

Comme dans le schéma de Brousseau, on a toujours Mn+1=Sn, le niveau n est donc toujours englobé dans le niveau n+1 (structure "d'oignon"), on a Sn={Mn, En, Pn}[14].

M3: M-de construction		P3: P-noosphérien	S3: situation noosphérienne	sur
M2: M-de projet		P2: P-constructeur	S2: situation de construction	di dac
M1: M-didactique	E1: E-réflexif	P1: P-projeteur	S1: situation de projet	ti qu e
M0: M-d'apprentissage	**E0: Elève**	**P0: Professeur**	**S0: situation didactique**	
M-1: M-de référence	E-1: E-apprenant	P-1: P-observateur	S-1: situation d'apprentissage	a-
M-2: M-objectif	E-2: E-agissant		S-2: situation de référence	di dac
M-3: M-matériel	E-3: E-objectif		S-3: situation objective	ti qu e

Commentaire:

- Je qualifie ici de "sur-didactique" les niveaux positifs, plutôt que de "méta-didactique" qui aurait pu être proposé. En effet, pour tout niveau n, le niveau n+1 est méta (méta (n) = n+1), si l'on considère que: «l'on adjoint ce préfixe à des activités cognitives pour nommer la forme que revêtent ces activités lorsqu'elles se prennent elles-mêmes pour objet[15]», ce qui est très exactement le cas.

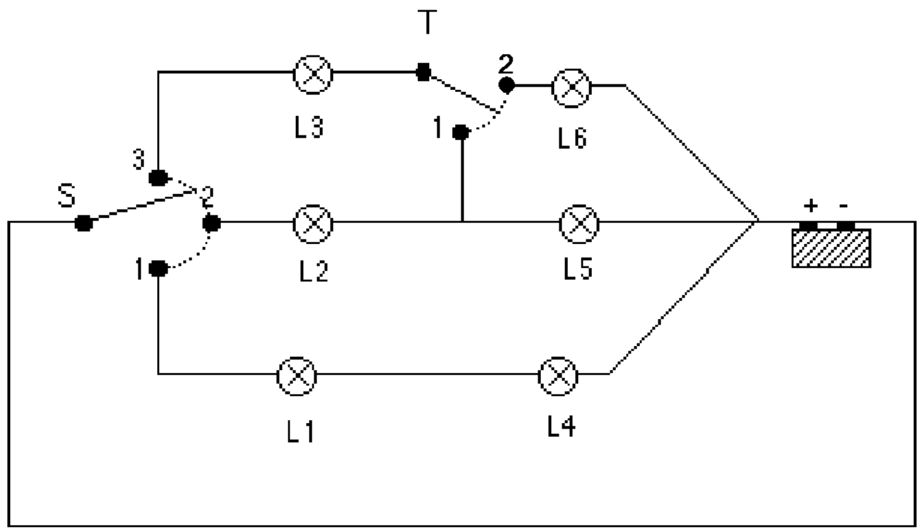
[13]Le schéma présenté ci-dessous correspond à celui de Margolinas 1993b.

[14]Plus exactement, la situation Sn correspond aux rapports entre Mn, En, Pn.

[15]BOUFFARTIGUE Jean et DELRIEU Anne-Marie, 1981, *Trésors des racines grecques,* ed Belin, p. 72.

Annexe 2
Enoncé du problème
"Circuit ou les règles du débat mathématiques"

Document distribué dans l'atelier Di Martino-Legrand, 1993



Ce circuit comporte six lampes notées L1, L2, … L6 et deux commutateurs S et T.

S peut prendre trois positions S1, S2 ou S3, et T peut en prendre deux T1 ou T2

C4) Si L2, alors L5 ou L4

C6) Si L1 ou L6, alors L2 ou L4

C7) Si L6, alors non-L1 ou non-L2

Les étudiants doivent se prononcer vis à vis de ces conjectures, écrites au fur et à mesure au tableau, ce que l'enseignant recueille sous forme d'un tableau:

V	F	Autre

Les étudiants sont ensuite invités à argumenter le bien fondé de leur position.

Annexe 3
Résumé des connaissances identifiées dans les deux analyses "ascendante" et descendante"

Connaissances relatives aux positions de l'élève

Connaissances ↑E	Connaissances ↓E
S1↑ situation d'étude des raisons des règles de la preuve mathématique κ↑E1 connaissance sur les raisons des règles de la preuve mathématique	*S1↓ projet d'installer une situation de débat qui permette la prise de conscience du dysfonctionnement de la logique courante* κ↓E1 connaissances sur les conditions du débat mathématique
S0↑ débat sur la validité des preuves des assertions κ↑E0 connaissances sur les preuves des assertions	*S0↓ épreuve et établissement des règles de la preuve mathématique* κ↓E0 connaissances sur le contrat didactique en cours d'établissement
S-1↑ débat des valeurs de vérité des propositions κ↑E-1 connaissances de "logique courante" κ↑E-1 connaissances sur les connecteurs logiques κ↑E-1 cconnaissances relatives à la simplification des assertions complexes κ↑E-1 connaissance d'une tactique d'étude des implications	*S-1↓ résolution complète du problème posé dans les consignes "circuit"* κ↓E-1 connaissances sur la logique κ↓E-1 connaissances sur la relation entre logique courante et logique mathématique
S-2↑ étude des concomittances de valeur pertinentes dans l'étude du problème posé κ↑E-2 connaissances sur les "concomittances"	
S-3↑ manipulation imaginée du circuit électrique donné κ↑E-3 connaissances élémentaires sur le fonctionnement des circuits	

Connaissances relatives aux positions du professeur

Connaissances ↑P	**Connaissances ↓P**
	S3↓ création des conditions nécessaires à un enseignement de mathématiques $\kappa{\downarrow}P3$: connaissances sur les conditions nécessaires au débat scientifique $\kappa{\downarrow}P3$: connaissances sur l'intérêt du débat scientifique $\kappa{\downarrow}P3$: connaissances sur la nature des règles du débat scientifique $\kappa{\downarrow}P3$: connaissances sur la compréhension des règles de la preuve mathématique
	S2 ↓ construction de la suite des situations "circuit ou les règles du débat mathématique" $\kappa{\downarrow}P2$: connaissances sur les règles de la preuve mathématique $\kappa{\downarrow}P2$: connaissances sur les difficultés d'ordre logique
S1↑ situation d'étude des raisons des règles de la preuve mathématique $\kappa{\uparrow}P1$ connaissances sur le projet d'enseignement des mathématiques à l'université	*S1↓ projet d'installer une situation qui permette le débat scientifique et la prise de conscience du dysfonctionnement de la logique courante* $\kappa{\downarrow}P1$ connaissances sur le savoir "logique" et ses apprêts didactiques $\kappa{\downarrow}P1$: connaissances sur certaines difficultés spécifiques de la logique $\kappa{\downarrow}P1$ connaissance sur les règles de la preuve mathématique à institutionnaliser
S0↑ débat sur la validité des preuves des assertions $\kappa{\uparrow}P0$ connaissances sur les conclusions des conjectures $\kappa{\uparrow}P0$ connaissances sur la possibilité de l'institutionnalisation des connaissances	*S0↓ épreuve et établissement des règles de la preuve mathématique* $\kappa{\downarrow}P0$ connaissances sur les règles de la preuve mathématique
S-1↑ débat des valeurs de vérité des propositions $\kappa{\uparrow}P\text{-}1$ connaissance sur les preuves des assertions discutées	*S-1↓ résolution complète du problème posé dans les consignes "circuit"* $\kappa{\downarrow}P\text{-}1$ connaissance sur le déroulement des phases de conclusion dans la situation "circuit"

Annexe 4, fin du protocole

140 µ: Alors… Je vais faire assez rapidement le point sur tout ce qu'on a fait… avant d'aborder la dernière phase qui est à mon avis est une des plus délicate, qui est la négation, la démonstration par l'absurde, etc.… qui est quelque chose qui pose, je crois, pas mal de problèmes… je fais simplement la synthèse des points essentiels qu'on a regardés maintenant depuis le début. Il faut bien voir… ce n'est pas parce que je mets des transparents au tableau que, du coup… vous allez plus (inaudible)… si ce qui est écrit au tableau n'est pas un résumé de ce qu'on a dit, si vous n'êtes pas d'accord, vous levez la main, et vous intervenez de façon à ce qu'on voit… j'espère qu'on est à peu près d'accord.

141 µ: Alors, première chose. L'affirmation qui a été faite, c'est… ce qui explique un certain nombre de choses que l'on trouve anormales en mathématiques, qui est cette sorte de vocation d'universalité qu'on s'est donnée. Universelle ne veut pas dire que c'est une science au dessus des autres, mais c'est une science qui s'est donné comme objectif que quand on s'en servait, on n'avait jamais de pépins avec… c'est la raison de la règle "un contre-exemple suffit", qui est si gênante d'un certain point de vue, mais au moins elle a l'avantage que les utilisateurs des théorèmes de mathématique, s'ils respectent les hypothèses, ils doivent pas avoir de pépins au niveau des conclusions. C'est le seul intérêt de cette règle, qui d'un certain point de vue est gênante. Donc il y a ce côté "universel", et ce qu'il faut bien remarquer, c'est que toutes les autres sciences, une fois qu'elle ont fait le travail le plus délicat, qui est la modélisation, c'est-à-dire transformer la réalité en un monde imaginaire dans lequel les choses sont beaucoup plus simples… une fois qu'elles ont fait ça, les autres disciplines, elles marchent avec la logique des mathématiques. Que vous soyez en physique, en biologie, en chimie, c'est bien la même logique qui est utilisée dès que vous êtes dans le modèle. Là où les sciences diffèrent énormément les unes des autres, c'est pour le passage du réel au modèle, et le retour du modèle au réel, ce qui est délicat… être physicien, c'est précisément être capable de faire des modélisations, et être capable d'interpréter ce qu'il y a dans le modèle sur le réel. C'est pas de faire des mathématiques entre les deux…enfin, je pense que le physicien a besoin des mathématiques entre les deux, mais ça c'est pas spécifique du physicien. Ce qui est spécifique du physicien, c'est la modélisation et le retour au réel. Donc… cette affirmation du rôle des mathématiques par rapport aux autres.

142 µ: Alors, pour que ça marche cette histoire là, le réel du mathématicien, c'est des idées. Donc ça, c'est à nouveau quelque chose qui paraît (inaudible) complètement fou, mais c'est ce qu'on a essayé de voir avec circuit : ce qui allume une lampe, c'est pas le fait qu'on le voit avec les yeux, c'est le fait qu'on peut appliquer un axiome qui nous dit : ah, les deux extrémités du fil sont rejoints à la batterie, à ce moment là, le circuit est fermé et elle s'éclaire, si ce n'est pas rejoint à la batterie, c'est éteint, et on n'utilise plus les yeux et les sensations pour s'en rendre compte. Ça c'est une différence énorme des mathématiques par rapport aux autres disciplines, c'est que le réel sur lequel… le concret, c'est des idées. Ça a un énorme avantage, parce qu'à chaque fois que quelqu'un d'entre nous voudra fabriquer un contre-exemple, il ne sera pas obligé d'invoquer une expérience difficile à réaliser à l'extérieur de l'amphi, il suffira qu'il nous donne un contre-exemple, c'est une idée à nouveau : il suffira qu'il nous dise, voilà, vous faites telle chose qui vérifie l'hypothèse, ça vérifie pas la conclusion, vous êtes d'accord ? A ce moment là, votre conjecture est fausse. Donc le fait que notre réel concret, c'est des idées, ça a un énorme avantage au niveau du débat mathématique, puisque pour montrer que quelque chose est faux, il suffit de produire une idée qui est contraire aux idées précédentes. Ce qui est un gros avantage, si vous voulez faire des contre-exemples en physique ou en chimie, c'est beaucoup plus dur, il faut un labo, il faut imaginer un montage, un dispositif expérimental qui va peut-être prendre des mois et des mois à réaliser, avec des mesures qu'il va falloir vérifier pour qu'elles soient pertinentes, pour enfin arriver à montrer aux gens que la conjecture qu'ils ont faite ne tient pas debout. Ici, c'est beaucoup plus facile, c'est l'avantage pour nous… qu'on a, qui a des inconvénients aussi (inaudible) aussi des avantages…

143 µ: Alors donc, les idées elles sont définies… c'est l'obligation de définition, ce qui est très pénible… Il faut bien définir les objets puisqu'ils n'existent que par leur définition. On est obligé d'avoir des axiomes de base, parce qu'il y a des prémices qu'on ne peut pas démontrer… c'est ce que certains d'entre vous ont affirmé : les mathématiques, elles sont pas complètement démontrées, il y a des bases sur lesquelles on se met d'accord, et à partir de ces bases, on construit l'édifice. Mais si on change de bases, l'édifice construit est différent, ça fait différentes branches des mathématiques.

144 µ: Donc, j'affirme très fort : il n'y a pas de mathématiques concrètes, ça n'existe pas des mathématiques concrètes, sauf dans la tête des politiques, qui veulent "faire concret", mais dans la réalité, les mathématiques sont parfaitement abstraites, puisque c'est un jeu de l'esprit. Ce qui ne veut pas dire que ça n'a pas de sens, parce qu'il ne faut pas mélanger l'abstrait et le manque de sens. On a bien vu qu'il y a des conflits avec le sens du quotidien, c'est ce qui a été permanent dans nos débats, ça ne veut pas du tout dire que ça n'a pas de sens. Ça a un sens d'universalité, ça a vocation à faire certaines choses, c'est ça son sens, ce n'est pas le même sens que quand on échange des (inaudible) avec des voisins ou des voisines.

145 µ: Donc, dans le modèle mathématique, les objets qu'on utilise doivent être assez structurés pour rentrer dans la dichotomie zéro-un, vrai-faux, etc. C'est dans ce sens là que le mathématicien tord le cou à la réalité. Il y a des réalités qui ne peuvent pas se mathématiser parce qu'elle ne peuvent pas rentrer dans ce moule du vrai-faux. Donc tout ce qui est trop fin pour rentrer dans une dichotomie n'est pas mathématisable, échappe au domaine des mathématiques, il y a d'autres disciplines qui s'en occupent. Mais par contre, tout ce qui rentrer dans une dichotomie de type vrai-faux est éventuellement mathématisable, c'est-à-dire que les mathématiques sont pertinentes pour dire des choses sur cette réalité.

146 µ: Alors à partir de là, une fois qu'on a nos objets primitifs, il y a nos conjectures. Ces conjectures sont des énoncés généraux sur des faits élémentaires. Donc c'est une idée générale à propos de faits particuliers. Ces conjectures, la plupart du temps, en mathématiques, possèdent une infinité d'exemples, de contre-exemples ou de hors-sujet, c'est-à-dire que les événements particuliers ne sont pas en général en nombre fini, ce n'est pas comme ce qu'on a vu dans circuit, ce qui complexifie le problème… Mais il n'empêche que… affirmer une conjecture, c'est dire : sous certaines hypothèses, j'affirme qu'il va se produire ceci. Alors… ces conjectures s'appellent souvent hypothèses dans les autres sciences… alors là, à nouveau… dans les autres sciences, ce qu'on appelle conjecture chez nous, par exemple en sciences naturelles, on appelle ça une hypothèse, donc c'est un changement de nom… Pour nous une hypothèse, c'est ce qu'on met comme condition initiale, donc il faut qu'on fasse gaffe, suivant les disciplines, les autres disciplines utilisent moins le mot conjecture que nous, ils utilisent le mot hypothèse, mais pas là où nous, nous l'utilisons, pour nous l'hypothèse, c'est les prémices, c'est le point de départ de la conjecture, et pour eux, les hypothèses c'est la conjecture elle-même.

147 µ: Bon !… Contrairement aux autres domaines de réalité, les mathématiques ne se préoccupent en principe que de la véracité des conjectures… mais on a bien vu que dès qu'on regarde une conjecture, il nous intéresse de voir si elle est intéressante, si elle n'est pas intéressante, si elle est utile, si elle est en train de nous tendre un piège ou de ne pas nous tendre un piège, tout ça c'est important de le remarquer au niveau du sens, mais pour le vrai-faux, la seule chose qui compte, c'est le contre-exemple.

148 µ: Alors… par contre, et ça c'est important comme règle du jeu entre nous, quand on va faire des mathématiques, c'est de dire : à chaque fois que quelqu'un proposera des énoncés avec des termes flous, dont on ne connaît pas la définition, ou dans lequel on dit p't'être bien qu'oui, p't'être bien que non, enfin, c'est élastique, on sait pas trop ce qui est proposé, et bien ces énoncés, on refusera de les discuter comme des conjectures, parce qu'on pourra pas les faire rentrer dans la dichotomie vrai-faux. Donc chacun d'entre nous, s'il veut nous proposer un énoncé conjectural, il faut qu'il s'oblige à être précis sur les termes qu'il utilise, et il faut pas qu'il nous mette, p't'être bien que ça va se produire, mais vous savez, je prends pas trop l'engagement, etc.

149 µ: Alors… là, je vais très vite… Pour décider de la véracité des conjectures, on regarde les cas particuliers, c'est ce que je vous ai rappelé tout à l'heure… donc on s'inquiète surtout de regarder les cas particuliers, ce sont eux qui nous permettent de se faire une idée. Alors… les cas particuliers, ils se traitent en contre-exemples - ceux qui satisfont l'hypothèse mais pas une partie de la conclusion - les exemples satisfont l'hypothèse et la conclusion, et puis les hors-sujet. Alors, les contre-exemples, ce sont eux qui servent à montrer la fausseté de la conjecture, au niveau du vrai et du faux, c'est la seule chose qui est importante. Les exemples, par contre, ils sont intéressants pour nous, parce qu'ils nous disent "cette conjecture est intéressante". Une conjecture qui est bourrée d'exemples, ben elle va servir, donc on a intérêt à le dire qu'on a un théorème intéressant, si c'est vrai. Par contre une conjecture qui n'a jamais d'exemple, comme le cas particulier qu'on a vu apparaître avec la conjecture C5 (inaudible) c'est des trucs qui sont vrais, mais qui sont complètement inutiles, donc on essaie d'éviter de produire ce genre de conjectures à longueur de journée, parce qu'on perd son temps. Donc… les exemples ont une grande importance au niveau du sens… et en plus de ça, et ça on le

verra, c'est souvent quand on regarde un exemple qu'on a des idées pour la démonstration. On verra la plupart du temps, quand l'un d'entre nous aura une idée de la démonstration, il aura commencé par la faire sur un exemple, et puis, il aura généralisé… Alors… les hors-sujet… donc maintenant, on leur a bien mis un nom à ces gens-là, c'est des cas particuliers qui ne vérifient pas l'hypothèse, alors à ce moment là quelle que soit la conclusion, on se fout éperdument de ce truc là, ça n'a aucun intérêt pour la conjecture, ça ne juge ni de sa vérité, ni de sa fausseté, on l'élimine, et on n'en fait pas des super contre-exemples comme certains le font quand on n'en a pas parlé avant.

150 µ: Bon… et alors la convention dichotomique de la logique mathématique : pour savoir si une conjecture est fausse, il faut et il suffit d'exhiber directement ou indirectement un contre-exemple, un seul, et le plus simple est le mieux… alors ça, vous vous en rendrez compte au cours de l'année, à fabriquer des contre-exemples très compliqués, personne ne vous écoute, parce qu'on ne voit pas que c'est des contre-exemples, par contre, si vous fabriquez un contre-exemple tout simple, le plus bête possible, où tout le monde est obligé de reconnaître, et bien oui moi je reconnais que c'est un contre-exemple, et bien vous avez fait votre opération, vous avez démontré que la conjecture était fausse. Et donc… quand maintenant vous verrez "résoudre cette conjecture", ça veut dire : il faut trancher. Il ne faut pas rester dans autre, dans point d'interrogation, résoudre, c'est précisément sortir du autre, et de dire : et bien, je suis certain qu'elle est vraie, parce que je vous prouve qu'il n'y a pas de contre-exemple, ou je suis certain qu'elle est fausse parce que je vous montre un contre-exemple. Donc résoudre une conjecture, c'est avoir une issue de type vrai-faux sur cet énoncé qui était au départ incertain.

151 µ: Alors… cette résolution, quand elle aboutit à un contre-exemple, elle montre que la conjecture est fausse, et quand il n'y a pas de contre-exemple, on dit que c'est un théorème. Alors bien entendu, sur les théorèmes, vous verrez qu'il peut y avoir plein de vocables dessus, c'est-à-dire qu'on ne s'empêche pas d'avoir des petites remarques en dehors du vrai et du faux. Un théorème par exemple qui sert tout le temps, ben on dit c'est un théorème très utile, on dit souvent il est très puissant, en voulant dire qu'il servira à beaucoup d'endroits. Donc, on va mettre du vocabulaire sur les théorèmes, qui n'a rien à voir avec le vrai et le faux, on va dire, ça c'est un théorème puissant pour dire qu'à beaucoup d'endroit, il rend vraiment service. Si on dit, ça c'est un théorème trivial, ben ça veut dire, vous êtes en train de dire une vérité de Lapalisse, c'est vrai, mais ça sert à rien, parce qu'on n'avait pas besoin de ça pour être persuadé du résultat. D'accord ?… Même chose…

152 µ: Alors après ça, j'ai noté que… la démonstration, c'est un acte social, dans la mesure où… se persuader qu'une conjecture est vraie ou est fausse, c'est qu'une communauté de mathématiciens se met d'accord sur le fait qu'elle est vraie ou elle est fausse. La communauté de mathématiciens, ici, c'est l'amphi. Moi, la garantie que je vous apporte, c'est qu'à terme, l'amphi ne prend pas des décisions qui sont contraires à la communauté externe des mathématiciens. Donc il se peut très bien se faire qu'une fois on se quitte, à 11 heures, à midi, avec une conjecture fausse, dont l'amphi sera persuadé qu'elle est vraie. Je laisserai un petit peu dormir ce truc là, en espérant que l'un d'entre nous aura un pépin avec, mais de toutes façon, avant la fin de l'année, je (inaudible) cette conjecture, de telle façon qu'on se rende compte qu'elle est contraire à ce que la communauté pense. A terme, la garantie que la communauté de mathématiciens que nous formons n'est pas contradictoire avec la communauté externe, et quand on a un débat… et c'est la raison pour laquelle je vous dis que c'est pas moi l'interlocuteur à persuader, quand on a un débat, si quelqu'un veut prouver quelque chose, c'est qu'il tient à persuader l'amphi que ça marche. (fin inaudible, brouhaha).

Bibliographie

BROUSSEAU Guy, 1986, La relation didactique: le milieu, *Actes de la 4e école d'été de didactique des mathématiques,* ed IREM de Paris 7.

BROUSSEAU Guy, 1990, Le contrat didactique: le milieu, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol 9 n°3 pp. 309-336, ed. La Pensée Sauvage, Grenoble.

CHEVALLARD Yves, 1985, *La transposition didactique*, ed. La Pensée Sauvage, Grenoble.

CHEVALLARD Yves, 1992, Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol 12 n°1 pp. 73-111, ed. La Pensée Sauvage, Grenoble.

COMITI Claude, GRENIER Denise, MARGOLINAS Claire, 1994, Différents niveaux de connaissances en jeu lors d'interactions en situation de classe et modélisation de phénomènes didactiques liés à ces interactions, *Colloque 11-12 Décembre 1994*, Lyon.

DI MARTINO Hélène, LEGRAND Marc, 1993, Le "méta" du débat scientifique, *Actes de la septième école d'été,* pp. 76-83

LEGRAND Marc, 1993, Débat scientifique en cours de mathématiquqes et spécificité de l'analyse, *Repères IREM,* n°10, pp. 123-159, ed. Topiques, Pont-à-Mousson.

MARGOLINAS Claire, 1992a, Eléments pour l'analyse du rôle du maître: les phases de conclusion , *Recherches en Didactique des Mathématiques vol 12 n°1*, pp. 113-158, ed. La Pensée Sauvage, Grenoble.

MARGOLINAS Claire, 1992b, Analyse de situation et analyse du rôle du maître sur un cas particulier, *Séminaire* n°138, pp. 185-205*de l'équipe DidaTech, LSDD, IMAG, Université Joseph Fourier, Grenoble.*

MARGOLINAS Claire, 1993a, *De l'importance du vrai et le faux dans la classe de mathématiques*, 255p., ed. La Pensée Sauvage, Grenoble.

MARGOLINAS Claire, 1993b, La structuration du milieu et ses apports dans l'analyse a posteriori des situations, *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques* (à paraître).

MARGOLINAS Claire, STEINBRING Heinz, 1993, Double analyse d'un épisode: cercle épistémologique et structuration du milieu, in ARTIGUE Michèle et coll. eds, 1993, *Vingt ans de didactique des mathématiques en France,* pp. 250-257, ed. La Pensée Sauvage, Grenoble.

ORUS-BAGUENA Pilar, 1992, *Le raisonnement des élèves dans la relation didactique: effet d'une initiation à l'analyse classificatoire dans la scolarité obligatoire,* Thèse de l'Université de Bordeaux 1, ed. IREM de Bordeaux.

RATSIMBA-RAJOHN Harrison, 1982, Eléments d'étude de deux méthodes de mesures rationnelles, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol 3 n°1 pp. 65-113, ed. La Pensée Sauvage, Grenoble.